

SESSION 2026

---

# AGREGATION CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : PHYSIQUE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.**

**Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire  
Tournez la page S.V.P.**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

| Concours | Section/option | Epreuve | Matière |
|----------|----------------|---------|---------|
| EAE      | 1500A          | 101     | 0385    |





# Étude d'écoulements tourbillonnaires en géophysique

---

Nous nous intéressons dans ce sujet à l'étude d'écoulements tourbillonnaires en géophysique qui se produisent dans l'atmosphère, les océans ou au sein du noyau terrestre. Au-delà de la dynamique des fluides, la modélisation et l'analyse expérimentale de ces phénomènes mobilisent des notions issues de nombreux autres domaines de la physique, que ce soit en optique, en électromagnétisme ou pour l'étude des transferts thermiques.

La **partie I** s'intéresse aux équations de base de la dynamique des fluides et les applique aux cas des maëlstroms ou d'écoulements tourbillonnaires de von Kármán, observés sur mer ou au laboratoire, dans des films de savon. Une troisième application porte sur des courants marins trouvant leur origine dans la force de Coriolis.

La **partie II** étudie les conséquences lithostatiques de la structure terrestre et propose un modèle permettant de comprendre l'établissement de courants de convection dans le noyau terrestre.

Les parties et sous-parties de cette épreuve sont largement indépendantes entre elles.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation ; les réponses aux questions qualitatives doivent être claires et argumentées.

Certaines questions sont repérées par une barre dans la marge. Il s'agit de questions moins guidées pour lesquelles il est attendu une **prise d'initiative** de la part du candidat. Une argumentation conforme à la démarche scientifique sera valorisée par le correcteur, même si la réponse proposée demeure inaboutie.

Certaines questions sont repérées par un numéro en contraste inversé (par exemple : **Q1**). Ces questions portent sur la présentation de lois ou la démonstration de résultats généraux. La rédaction doit en être à la fois rigoureuse et claire, et comporter une présentation précise des hypothèses nécessaires.

## Constantes et données physiques

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Accélération de pesanteur terrestre :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Masse volumique de l'eau à 20°C :  $\mu_{\text{eau}} = 998,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Viscosité dynamique de l'eau à 20°C :  $\eta_{\text{eau}} = 1,003 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Indice optique de l'eau savonneuse :  $n = 1,4$

Masse volumique des roches constituant la croûte terrestre :  $\mu_{\text{croûte}} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Masse volumique du fer dans le noyau terrestre et dans la graine :  $\mu_{\text{noyau}} = 11 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Capacité thermique massique du fer dans le noyau terrestre :  $c_{\text{Fe}} = 0,45 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Conductivité thermique du fer dans le noyau terrestre :  $\lambda_{\text{Fe}} = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Pression atmosphérique :  $P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$

Pression à la limite noyau/manteau :  $P_M = 140 \text{ GPa}$

Pression de solidification du fer à 5000 K :  $P_{\text{sol}}(5000 \text{ K}) = 320 \text{ GPa}$

Masse de la Terre :  $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Rayon de la Terre :  $R_T = 6371 \text{ km}$

Période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique :  $T_{\text{jour}} = 8,62 \times 10^4 \text{ s}$

## Formulaire

Dans ce formulaire,  $\vec{v}$  représente le champ de vitesse d'un fluide,  $P$  le champ de pression,  $\mu$  sa masse volumique et  $\eta$  sa viscosité dynamique.

Définition du champ vectoriel de vorticité  $\vec{\Omega}$  d'un écoulement de champ de vitesse  $\vec{v}$  :

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$$

 quation locale de conservation de la masse pour un fluide en écoulement :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

 quation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien visqueux, soumis à une résultante des forces volumiques extérieures  $\vec{f}_v$  :

$$\mu \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

Nombre de Reynolds d'un écoulement de vitesse caractéristique  $V$  et de longueur caractéristique  $L$  :

$$\mathcal{Re} = \frac{\mu V L}{\eta}$$

Expressions des coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  en amplitude à l'interface entre deux milieux d'indices optiques  $n_1$  et  $n_2$ , pour une onde lumineuse incidente venant du côté d'indice  $n_1$  en incidence normale :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

## Intégrale utile

$$\int_0^{+\infty} \exp(-u) \cos(u + \alpha) du = \frac{\cos(\alpha)}{2} - \frac{\sin(\alpha)}{2}$$

## Formulaire d'analyse vectorielle

Dans ce formulaire  $U$  désigne un champ scalaire ;  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  des champs vectoriels.

Définition de l'opérateur laplacien pour un champ scalaire :  $\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U)$

Expression de l'opérateur laplacien pour un champ scalaire en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Expression de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div } \vec{B}) \vec{A} - (\text{div } \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \wedge \vec{B} = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{2} \right)$$

$$\text{div}(U \vec{A}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(U) + U \text{div}(\vec{A})$$

## Composées d'opérateurs différentiels

$$(\forall U) \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(U)) = \vec{0}$$

$$(\forall \vec{A}) \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = 0$$

## Théorèmes d'analyse vectorielle

Le **théorème de Green-Ostrogradski** stipule que, pour tout champ de vecteur  $\vec{A}$ , l'intégrale sur un volume  $\mathcal{V}$  de la divergence de ce champ de vecteur est égale au flux de ce champ sortant de la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le volume  $\mathcal{V}$ .

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{A}) d\mathcal{V} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS$$

Le **théorème de Stokes-Ampère** stipule que, pour tout champ de vecteur  $\vec{A}$ , la circulation de ce champ sur un contour fermé et orienté est égale au flux du rotationnel de ce champ à travers une surface  $\mathcal{S}$  de normale  $\vec{n}$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$ , orientée par la règle de la main droite relativement au sens du contour.

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

# I. Étude d'écoulements tourbillonnaires océaniques

Cette partie présente et propose des modèles simples de phénomènes hydrodynamiques dans lesquels la vorticité joue un rôle important.

## I.A - Résultats généraux de dynamique des fluides

Dans un premier temps, on considère l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien visqueux (de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta$ ). On note  $\vec{v}$  le champ vectoriel des vitesses du fluide en écoulement par rapport au référentiel d'étude.

- Q1.**   l'aide d'un bilan de masse et en exploitant le théorème de Green-Ostrogradski, démontrer l'équation locale de conservation de la masse rappelée dans le formulaire.
- Q2.** Préciser une propriété qui définit un champ vectoriel à flux conservatif. Montrer que le champ des vitesses d'un fluide incompressible est à flux conservatif. En déduire une propriété des tubes de courant d'un fluide incompressible.
- Q3.** Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel de champ de vitesse  $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x$ , exprimer l'accélération  $\vec{a}(x, t)$  d'une particule fluide se trouvant à la position  $x$  à l'instant  $t$ . Pour un écoulement quelconque, exprimer sans démonstrations le champ des accélérations  $\vec{a}$  en fonction du champ de vitesse  $\vec{v}$ .
- Q4.** En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule fluide, démontrer l'équation de Navier Stokes figurant dans le formulaire. On admettra les expressions des forces volumiques résultant des forces de pression et des forces de viscosité.
- Q5.** Identifier le terme convectif et le terme diffusif dans l'équation de Navier Stokes. Par un raisonnement en ordres de grandeur, montrer que le nombre de Reynolds rappelé dans le formulaire représente l'ordre de grandeur du rapport de ces deux termes.

## I.B - étude des ma lstroms du détroit de Saltstraumen

Le maëlstrom est un courant marin rapide générant des tourbillons. Le détroit de Saltstraumen, qui sépare les  les de Straumen et de Straum ya au large de la côte sud de la Norvège, abrite le maëlstrom le plus puissant de la planète (**Figure 1**).   marée montante ou descendante, l'eau entre ou sort du détroit de Saltstraumen à une vitesse de  $40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Au plus fort des courants, plusieurs tourbillons se forment, atteignant jusqu'à 10 mètres de large et 5 mètres de profondeur.



**Figure 1 :** Maëlstrom dans le détroit de Saltstraumen (Norvège).

On suppose que la masse volumique et la viscosité de l'eau de mer diffèrent peu de celles de l'eau pure à 20°C, notées respectivement  $\mu_{\text{eau}}$  et  $\eta_{\text{eau}}$ .

- Q6.** Calculer le nombre de Reynolds associé à cette situation. En déduire que l'on peut négliger le terme  $\eta\Delta\vec{v}$  dans l'équation de Navier Stokes.

L'écoulement d'eau salée généré par le maëlstrom est supposé stationnaire et incompressible. Conformément au résultat de la question **Q6**, on néglige les effets de la viscosité. Le champ vectoriel des vitesses associé est orthoradial, de la forme :  $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$ .

On modélise le maëlstrom du détroit de Saltstraumen par un cylindre d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $a$ , où l'axe  $(Oz)$  est vertical ascendant, d'origine prise au niveau de la mer loin du maëlstrom.

À l'intérieur du maëlstrom ( $r \leq a$ ), l'écoulement d'eau salée est associé à un champ vectoriel de vorticité uniform  et parallèle à l'axe  $(Oz)$ , tandis qu'à l'extérieur du maëlstrom ( $r > a$ ), l'écoulement d'eau salée est supposé irrotationnel.

On a donc :

$$\vec{\Omega}(r) = \begin{cases} \Omega \vec{u}_z & \text{si } r \leq a \\ \vec{0} & \text{si } r > a \end{cases}$$

### Analogie magnétostatique

- Q7.**  noncer les équations locales de Maxwell vérifiées par le champ magnétostatique associé à une densité de courant électrique  $\vec{j}$  indépendante du temps. Montrer que les champs  $\vec{B}$  et  $\mu_0\vec{j}$  vérifient des équations locales identiques à celles vérifiées par les champs  $\vec{v}$  et  $\vec{\Omega}$ .

- Q8.**  noncer, en le démontrant, le théorème d'Ampère de la magnétostatique.

On considère un fil rectiligne, d'extension supposée infinie selon l'axe  $(Oz)$ , de diamètre  $a$ , parcouru par une densité de courant  $\vec{j}$  uniforme selon  $+\vec{u}_z$ .

On a donc :

$$\vec{j}(r) = \begin{cases} j \vec{u}_z & \text{si } r \leq a \\ \vec{0} & \text{si } r > a \end{cases}$$

- Q9.** Par une étude des symétries et des invariances, déterminer la direction du champ magnétostatique crée par ce fil ainsi que la variable dont il dépend.

- Q10.** Déterminer l'expression du champ magnétostatique en tout point de l'espace.

- Q11.** En utilisant l'analogie précisée en question **Q7**, déterminer le champ de vitesse associé au maëlstrom en tout point de l'espace. Représenter l'allure de la fonction  $v(r)$  et interpréter l'expression « l' il du cyclone ».

- Q12.**  noncer en le démontrant le théorème de Bernoulli pour un écoulement irrotationnel dans un champ de gravitation uniforme  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ , en précisant ses conditions d'application.

- Q13.** Déterminer l'expression du champ de pression  $P(r, z)$  dans l'eau salée à l'extérieur du maëlstrom (donc pour  $r > a$ ). On notera  $P_0$  la pression en surface très loin du maëlstrom.

- Q14.**   partir des équations donnant  $\partial P/\partial r$  et  $\partial P/\partial z$ , montrer que le champ de pression dans l'eau salée à l'intérieur du maëlstrom (donc pour  $r \leq a$ ) a pour expression :

$$P(r, z) = P_0 - \mu g z + \mu \Omega^2 \left( \frac{r^2}{8} - \frac{a^2}{4} \right)$$

- Q15.** Représenter la forme de la surface de la mer. Déterminer la valeur de la norme du vecteur tourbillon qui permette d'engendrer un creux de profondeur  $H = 5$  m pour un maëlstrom de 10 m de large. En déduire la valeur du temps mis par la particule de fluide en  $r = a$  pour faire un tour. Commenter.

## I.C - Étude d'allées tourbillonnaires de von Kármán

Des études approfondies sur la stabilité des écoulements laminaires autour d'un obstacle en fonction du nombre de Reynolds ont mis en évidence un régime particulier dans lequel des tourbillons apparaissent de façon périodique dans le sillage de l'écoulement. Les sens de rotation de deux tourbillons successifs sont opposés. Ces tourbillons advectés (c'est-à-dire transportés par convection) vers l'aval créent une allée tourbillonnaire, appelée *allée de von Kármán*. La **Figure 2** montre un exemple de ce phénomène.

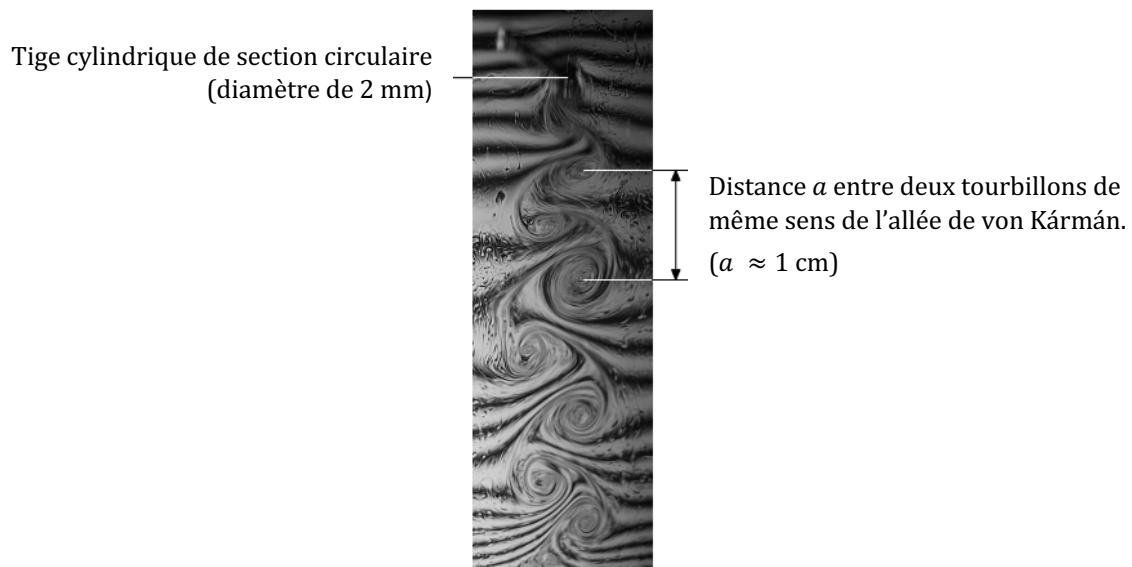


**Figure 2** : Un exemple d'allée de tourbillons de von Kármán.

Pour un obstacle cylindrique, la formation de tourbillons contrarotatifs des deux côtés du sillage apparaît à partir d'un nombre de Reynolds critique  $Re = 48$ .

### I.C.1 - Allée de von Kármán observée dans un film de savon

La **Figure 3** montre une allée de von Kármán obtenue au laboratoire dans l'écoulement bidimensionnel au sein d'un film de savon dans lequel on déplace une tige cylindrique.



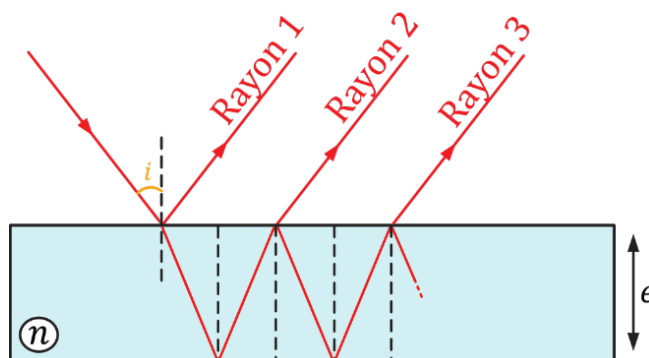
**Figure 3** : Allée de von Kármán dans une lame de savon (travaux de Guillaume Durey - CERN).

La tige de section cylindrique est placée orthogonalement au plan d'une lame de savon. La lame de savon est supposée au repos loin de la tige. La tige, déplacée à une vitesse constante  $V_{\infty} = 2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  selon la verticale ascendante, engendre l'apparition d'une allée tourbillonnaire, organisée en deux rangées de tourbillons contrarotatifs émis périodiquement avec une fréquence  $f$ .

Les tourbillons sont observés par la déformation qu'ils induisent dans la figure d'interférences obtenue en éclairant la lame de savon. Les questions suivantes (Q16 à Q27) s'intéressent à ce phénomène optique.

### Figure d'interférences produite par une lame de savon d'épaisseur constante

Dans un premier temps, on considère une lame de savon à faces parallèles rigoureusement plane, d'épaisseur  $e$  et d'indice optique  $n$ . Cette lame est éclairée par un faisceau monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide) parfaitement collimaté, arrivant sous un angle d'incidence  $i$ . La situation est schématisée sur la **Figure 4**.



**Figure 4 :** Trajet des rayons lumineux interférant sur une lame de savon à faces parallèles.

**Q16.** Justifier l'hypothèse faite dans la suite que seuls les deux premiers rayons réfléchis participent notablement au phénomène d'interférences en réflexion.

*Indication :* l'argumentation s'appuiera sur les valeurs numériques et relations théoriques données en préambule du sujet, sachant que l'indice optique de l'air est pris égal à 1.

**Q17.** Pour un faisceau parfaitement collimaté parvenant en incidence normale, déterminer l'expression de la différence de marche géométrique à l'infini entre le rayon lumineux 1 (réfléchi sur le dioptré air-eau) et le rayon lumineux 2 (réfléchi sur le dioptré eau-air après réfraction sur dioptré air-eau). En déduire l'expression de la différence de phase associée.

**Q18.** Expliquer l'observation faite par Isaac Newton que juste avant d'éclater, une lame de savon devient subitement noire.

**Q19.** Expliquer le phénomène de localisation des franges d'interférences qui se produit lorsqu'on utilise une source étendue spatialement.

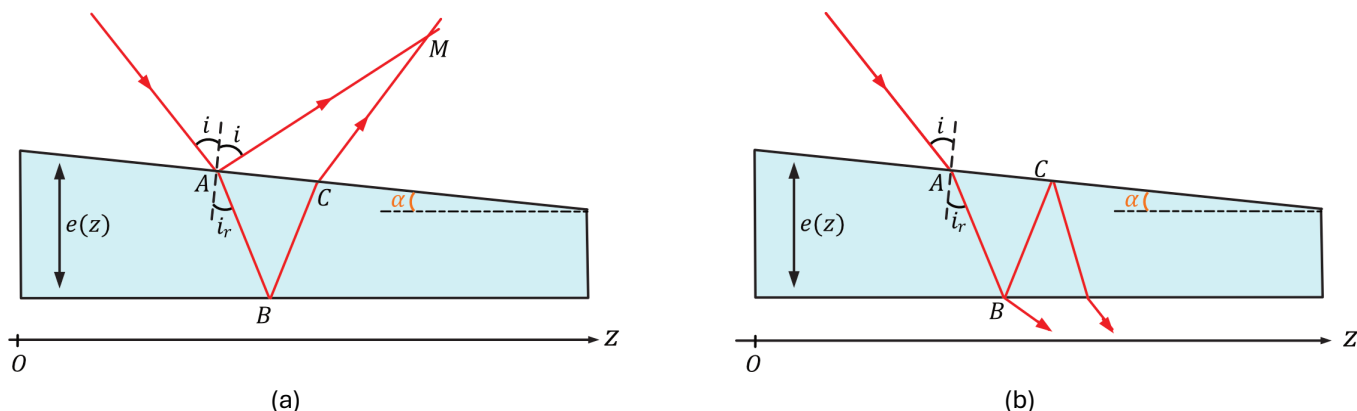
**Q20.** Préciser sans démonstration le lieu de localisation de la figure d'interférences et représenter par un schéma commenté les conditions pratiques de sa visualisation.

### Figure d'interférences produite par une lame de savon d'épaisseur variable

On considère dans cette partie que l'épaisseur  $e(z)$  de la lame de savon n'est pas uniforme sur toute la largeur de la lame de savon. On suppose que ces variations d'épaisseur demeurent faibles :  $\frac{de}{dz} \ll 1$ .

En réflexion, le trajet d'un rayon lumineux arrivant avec un angle d'incidence  $i$  sur la lame de savon est schématisé sur la **Figure 5a**. Une division d'amplitude se produit sur la face avant de la lame de savon : le

faisceau (1) réfléchi au point  $A$  au niveau de l'interface {air - eau savonneuse} et le rayon (2) réfléchi au point  $B$  au niveau de l'interface {eau savonneuse - air} interfèrent au point  $M$ .



**Figure 5 :** (a) Trajet des rayons lumineux interférant en réflexion sur une lame de savon  
(b) Trajet des rayons lumineux interférant en transmission sur une lame de savon.

**Q21.** Montrer qu'en incidence quasi-normale et à la longueur d'onde  $\lambda_0$ , le déphasage entre les deux ondes lumineuses qui interfèrent au point  $M$  de la **Figure 5a** peut s'écrire, en notant  $z_A$  la cote du point  $A$  :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( 2ne(z_A) + \frac{\lambda_0}{2} \right)$$

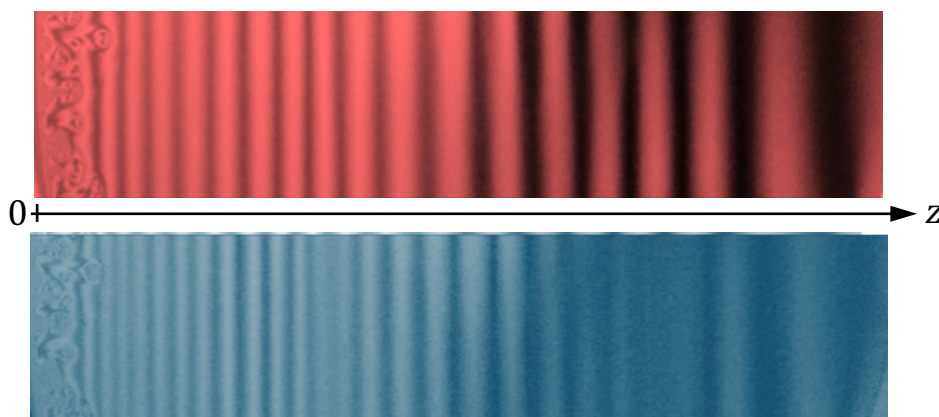
*Indication :* pour démontrer cette relation, on pourra représenter schématiquement la situation où l'incidence du rayon transmis au point  $B$  est normale à l'interface eau-savonneuse-air inférieure, et on admettra la généralité de l'expression du déphasage obtenu dans cette situation dans la mesure où l'angle d'incidence  $i$  reste faible.

**Q22.** Préciser, sans démonstration, le lieu de localisation de la figure d'interférences et représenter par un schéma commenté les conditions pratiques de sa visualisation.

**Q23.** Justifier que la figure d'interférences en transmission (configuration de la **Figure 5b**) est beaucoup moins contrastée que la figure d'interférences observée en réflexion (configuration de la **Figure 5a**).

### Évolution spatiale de l'épaisseur de la lame de savon

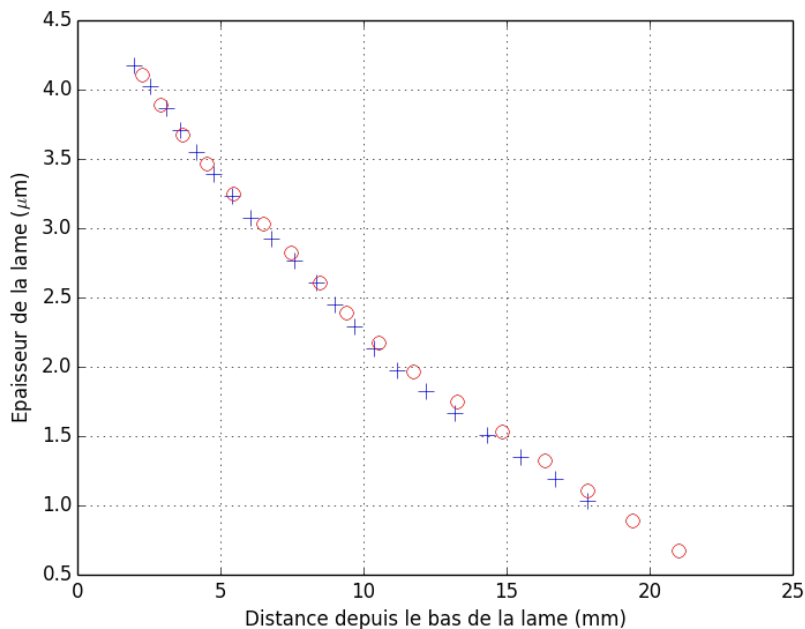
La **Figure 6** présente les intensités lumineuses observées selon l'axe ( $Oz$ ) pour une onde incidente dans le rouge ( $\lambda_{\text{rouge}} = 600 \text{ nm}$ ) et dans le bleu ( $\lambda_{\text{bleu}} = 440 \text{ nm}$ ).



**Figure 6 :** Figure d'interférences en réflexion dans le rouge (en haut) et le bleu (en bas).

À l'aide d'un logiciel de traitement d'images, on mesure la position des franges brillantes depuis le bas de la lame pris comme origine de l'axe vertical ascendant ( $Oz$ ). On en déduit l'ordre des différentes franges observées dans le rouge et dans le bleu, ce qui permet d'obtenir un profil d'épaisseur de la lame à partir des données obtenues dans le rouge et dans le bleu. Les résultats sont représentés sur la **Figure 7**.

| Ordre $p$ | $z_{\text{rouge}}$ (mm) | $z_{\text{bleu}}$ (mm) |
|-----------|-------------------------|------------------------|
| 21        | 2,27                    | 1,98                   |
| 20        | 2,90                    | 2,56                   |
| 19        | 3,65                    | 3,10                   |
| 18        | 4,51                    | 3,59                   |
| 17        | 5,46                    | 4,14                   |
| 16        | 6,49                    | 4,74                   |
| 15        | 7,44                    | 5,40                   |
| 14        | 8,45                    | 6,06                   |
| 13        | 9,40                    | 6,78                   |
| 12        | 10,52                   | 7,59                   |
| 11        | 11,72                   | 8,33                   |
| 10        | 13,25                   | 8,99                   |
| 9         | 14,83                   | 9,68                   |
| 8         | 16,35                   | 10,37                  |
| 7         | 17,84                   | 11,18                  |
| 6         | 19,40                   | 12,16                  |
| 5         | 21,01                   | 13,19                  |
| 4         | -                       | 14,31                  |
| 3         | -                       | 15,49                  |
| 2         | -                       | 16,70                  |
| 1         | -                       | 17,82                  |



**Figure 7 :** Profil d'épaisseur de la lame de savon compatible avec le relevé des positions des franges brillantes dans le rouge (o) et dans le bleu (+).

**Q24.** En notant  $p$  l'ordre d'interférences de la frange brillante d'altitude  $z$ , montrer que l'épaisseur de la lame au niveau de la frange d'altitude  $z$  pour la longueur d'onde  $\lambda_0$  s'écrit :

$$e(z) = \frac{2p - 1}{4n} \lambda_0$$

**Q25.** Justifier qualitativement que le profil représenté en **Figure 7** est plausible et proposer une interprétation aux écarts observés pour les mesures d'épaisseur à partir des données obtenues dans le rouge et dans le bleu.

**Q26.** Déterminer l'ordre de grandeur des variations d'épaisseur mesurables par cette méthode interférentielle. La sensibilité est-elle meilleure avec une lumière rouge ou une lumière bleue ?

**Q27.** Expliquer ce qui se passe si on éclaire la lame de savon en lumière blanche. Montrer que les franges d'interférences restent observables en lumière blanche seulement si l'épaisseur de la lame est inférieure à quelques centaines de nanomètres.

### Étude expérimentale d'une allée de von Kármán dans une lame de savon

Si un écoulement apparaît au sein de la lame de savon, par exemple à cause d'une allée de tourbillons de von Kármán, les franges sont déformées. La mesure de cette déformation est un outil de caractérisation de l'écoulement qui en est à l'origine.

On suppose que la masse volumique et la viscosité de l'eau savonneuse diffèrent peu de celles de l'eau pure à 20°C, notées respectivement  $\mu_{\text{eau}}$  et  $\eta_{\text{eau}}$ .

Afin d'étudier le phénomène d'allée de von Kármán dont la photographie est visible en **Figure 3**, on introduit le nombre de Strouhal :

$$St = \frac{fd}{v_t}$$

Dans cette expression :

- $v_t$  est la vitesse à laquelle sont advectés les tourbillons dans l'écoulement ;
- $f$  est la fréquence d'émission des tourbillons ;
- $d$  est la dimension caractéristique de l'obstacle générant l'allée tourbillonnaire de von Kármán.

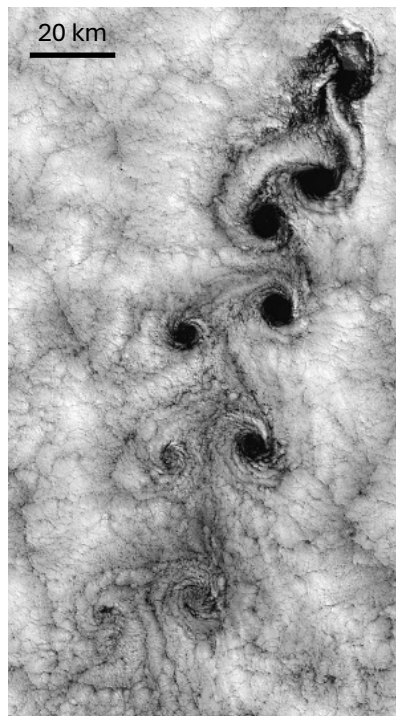
Le nombre de Strouhal est de l'ordre de 0,2 dans une allée tourbillonnaire de von Kármán.

**Q28.** Montrer que le nombre de Strouhal peut s'interpréter comme le rapport de deux distances ou de deux temps caractéristiques, dont le sens physique sera explicité.

**Q29.** On admet que la vitesse d'advection  $v_t$  est environ égale à la moitié de la vitesse  $V_\infty$  de déplacement de la tige. Estimer la fréquence à laquelle sont émis les tourbillons de l'allée de von Kármán dans l'expérience de la **Figure 3**. Déterminer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds dans cette expérience et commenter.

### I.C.2 - Une allée de Von Kármán océanique

La **Figure 8** montre une photographie satellite de l'archipel Juan Fernandez, situé au large du Chili. Cet archipel, de dimension transversale  $D = 7$  km, est situé dans l'écoulement océanique du Pacifique. Le courant, supposé de vitesse uniforme  $V_\infty = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  en amont de l'archipel, donne lieu à une allée tourbillonnaire de von Kármán.

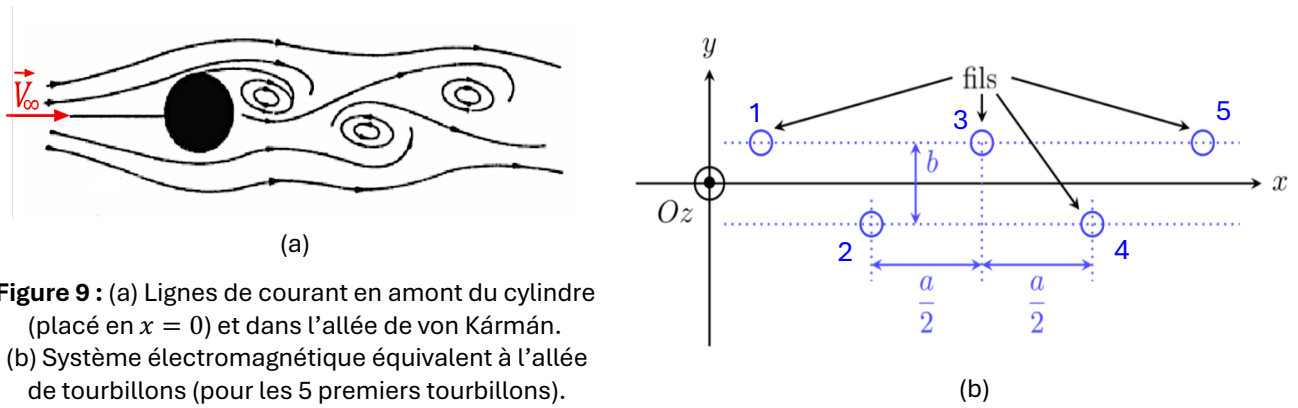


**Figure 8 :** Allée de tourbillons de von Kármán observée par le satellite LandSat 7 dans le sillage de l'archipel de Juan Fernández au Chili (Source : NASA).

On cherche dans cette partie à modéliser l'écoulement tourbillonnaire dans le sillage de l'archipel Juan Fernandez. On se propose pour cela de faire appel à l'analogie magnétostatique développée dans les questions **Q7** à **Q9**.

On considère donc que le champ des vitesses de l'écoulement est analogue au champ magnétostatique résultant de la superposition (voir **Figure 9**) :

- d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_\infty = B_\infty \vec{u}_x$  ;
- d'un ensemble de fils rectilignes infinis, de diamètres nuls, parallèles à l'axe ( $Oz$ ) et régulièrement espacés, parcourus par des courants d'intensité algébrique  $\pm I$ .



**Figure 9 :** (a) Lignes de courant en amont du cylindre (placé en  $x = 0$ ) et dans l'allée de von Kármán. (b) Système électromagnétique équivalent à l'allée de tourbillons (pour les 5 premiers tourbillons).

**Q30.** Rappeler sans démonstration l'expression du champ magnétostatique produit par un unique fil rectiligne de diamètre nul, d'extension supposée infinie selon l'axe ( $Oz$ ), parcouru par un courant d'intensité  $I$  selon  $+\vec{u}_z$ .

**Q31.** Préciser le sens de circulation du courant dans les différents fils de la **Figure 9b**) pour que le modèle électromagnétique proposé traduise correctement la situation hydrodynamique.

On admet la relation de correspondance entre grandeurs mécaniques et magnétiques analogues :

$$\pi V_\infty D \leftrightarrow \mu_0 I$$

**Q32.** En supposant qu'un tourbillon n'est affecté que par ses quatre plus proches voisins, montrer que la vitesse de déplacement du 3<sup>ème</sup> tourbillon de l'allée (et des tourbillons suivants) s'écrit :

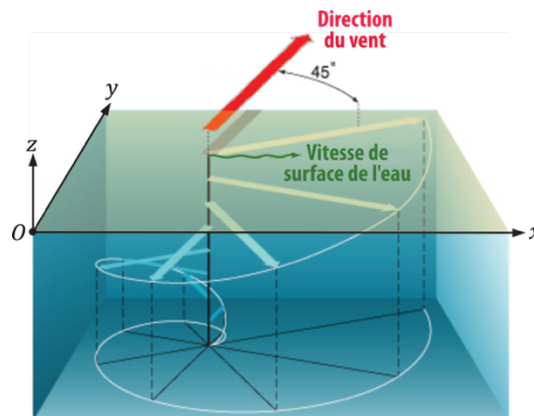
$$\vec{v}_t = V_\infty \left( 1 - \frac{Db}{\frac{a^2}{4} + b^2} \right) \vec{u}_x$$

**Q33.** À partir de la **Figure 8**, estimer les valeurs numériques de  $a$  et  $b$ .

**Q34.** Déterminer l'ordre de grandeur du rapport  $v_t/V_\infty$ . En déduire la fréquence d'émission des tourbillons derrière l'archipel Juan Fernández. Déterminer le nombre de Strouhal (défini en préambule de la question **Q28**) associé à cet écoulement et commenter le résultat.

## I.D - Étude des spirales d'Ekman du pôle Nord

Si l'action des vents influence les courants à la surface de l'océan, c'est principalement la force de Coriolis qui gouverne les courants en eaux profondes. Les courants de surface et en eaux profondes ne possèdent ainsi pas la même direction. Le changement graduel de direction des courants en fonction de la profondeur pour une colonne d'eau prend la forme d'une spirale, nommée *spirale d'Ekman* (voir **Figure 10**).



**Figure 10 :** Géométrie envisagée pour l'étude de la spirale d'Ekman.

Une conséquence du phénomène de spirale d'Ekman est que les objets à la surface des eaux du pôle Nord (iceberg ou navires) dérivent systématiquement d'un angle de 20° à 40° à droite de la direction du vent.

**Q35.** Définir un référentiel galiléen.

**Q36.** Définir le référentiel géocentrique et préciser à quelle condition ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

**Q37.** Définir le référentiel terrestre et préciser à quelle condition ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

**Q38.** Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe, rappeler, sans démonstration mais en définissant soigneusement les notations utilisées, les expressions de l'accélération complémentaire (aussi appelée accélération de Coriolis) et de l'accélération d'entraînement. On notera  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation du référentiel relativement à un référentiel Galiléen.

**Q39.** Expliciter les forces volumiques s'exerçant sur une particule de fluide de l'écoulement dans le référentiel terrestre, en tenant compte de son caractère non galiléen.

L'océan, supposé d'extension infinie dans les directions horizontales, repose sur un fond supposé plat, de normale  $\vec{u}_z$  dirigé selon la verticale ascendante. La surface libre de l'océan est le plan  $(xOy)$  pris comme origine des altitudes. On note  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  la vitesse de surface de l'eau sous l'effet du vent.

L'écoulement au sein de l'océan est modélisé par un écoulement incompressible et visqueux.

Le champ vectoriel des vitesses est stationnaire, horizontal et ne dépend que de la profondeur :

$$\vec{v} = v_x(z)\vec{u}_x + v_y(z)\vec{u}_y$$

La masse volumique  $\mu$  et la viscosité  $\eta$  de l'eau salée seront prises égales à celles de l'eau pure à 20°C, notées respectivement  $\mu_{\text{eau}}$  et  $\eta_{\text{eau}}$ .

Pour étudier les caractéristiques de l'écoulement d'Ekman, on se place au voisinage du pôle Nord, dans le référentiel terrestre.

**Q40.** Montrer que le terme d'accélération convective est nul dans l'équation de Navier-Stokes.

**Q41.** En déduire que l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu_{\text{eau}} \vec{g} + \frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} (v_y \vec{u}_x - v_x \vec{u}_y) + \eta_{\text{eau}} \Delta \vec{v}$$

**Q42.** Déterminer l'expression du champ de pression  $P$  en tout point de l'océan.

**Q43.** Montrer que les fonctions  $v_x(z)$  et  $v_y(z)$  sont reliées par deux équations différentielles couplées du second ordre de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{1}{\delta^2} v_y(z) = 0 \\ \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2} v_x(z) = 0 \end{cases}$$

Exprimer le paramètre  $\delta$  en fonction de  $T_{\text{jour}}$ ,  $\eta_{\text{eau}}$  et  $\mu_{\text{eau}}$ . Préciser sa dimension et déterminer sa valeur numérique.

Pour résoudre le système d'équations couplées, on utilise une méthode de résolution dans le domaine complexe en posant :

$$\tilde{V} = v_x + i v_y \quad \text{avec} \quad i^2 = -1$$

**Q44.** Déterminer l'équation différentielle dont est solution la variable complexe  $\tilde{V}$ .

**Q45.** Résoudre cette équation différentielle en supposant l'océan infiniment profond. En déduire les expressions de  $v_x(z)$  et  $v_y(z)$ .

**Q46.** Déterminer les valeurs  $D_x$  (respectivement  $D_y$ ) du débit massique de fluide à travers un rectangle de largeur unité perpendiculaire à la direction  $(Ox)$  (respectivement  $(Oy)$ ) sur l'ensemble de la

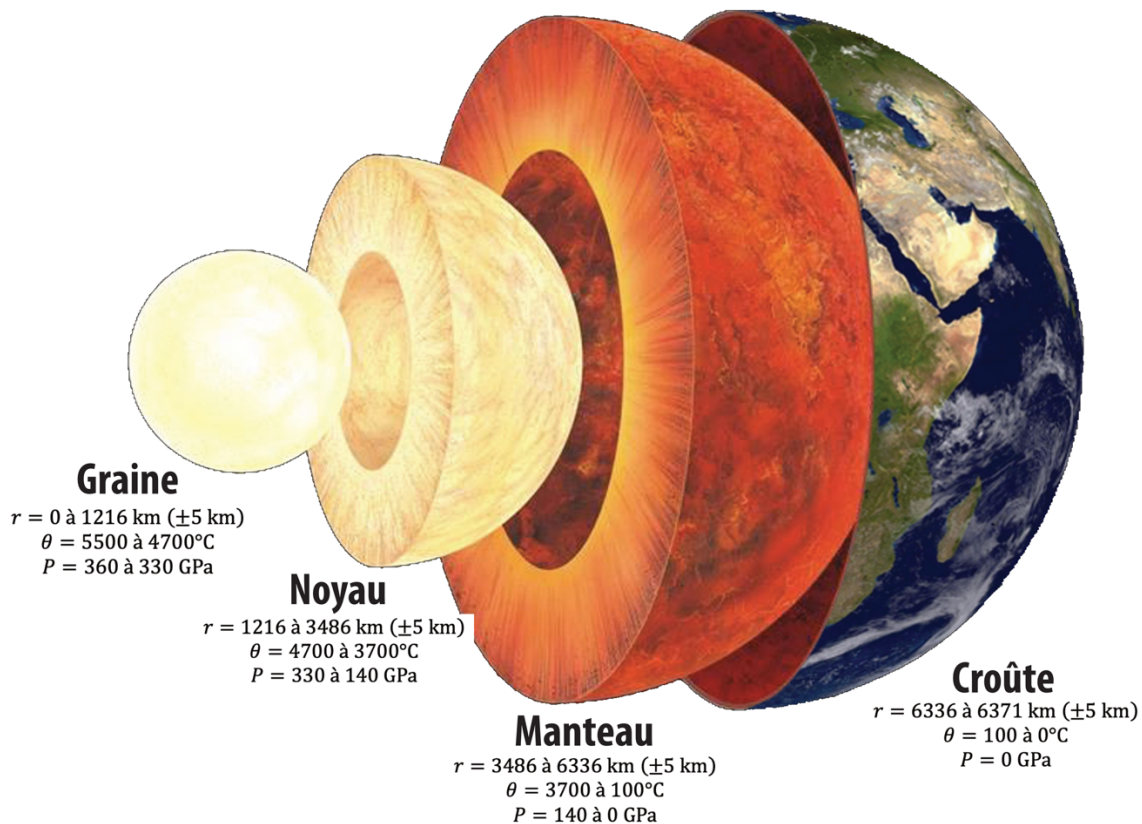
profondeur du fluide. En déduire la direction moyenne dans laquelle l'eau de mer est transportée. Commenter au regard du texte introductif à cette partie I.D.

## II. Étude d'écoulements tourbillonnaires au sein de la Terre

En géophysique, les phénomènes de tectonique des plaques (séismes et éruptions volcaniques) sont l'expression en surface des mouvements de convection ayant lieu en profondeur. Nous nous proposons dans cette partie de modéliser la structure interne de la Terre (partie A) afin d'expliquer les processus de convections qui s'opèrent au cœur de notre planète (partie B).

### II.A - Structure interne de la Terre

L'intérieur de la Terre est constituée de couches successives, dont la répartition et les caractéristiques physique sont représentées sur la **Figure 11**.



**Figure 11** : Structure interne de la Terre.

#### Pression lithostatique au sein de la Terre

La **Figure 11** montre que la pression augmente avec la profondeur. À haute pression, bien que solides, les roches du manteau se comportent comme si elles étaient des fluides extrêmement visqueux : on dit qu'elles *fluent*. À des profondeurs moindres, ces roches peuvent casser et donc générer des séismes.

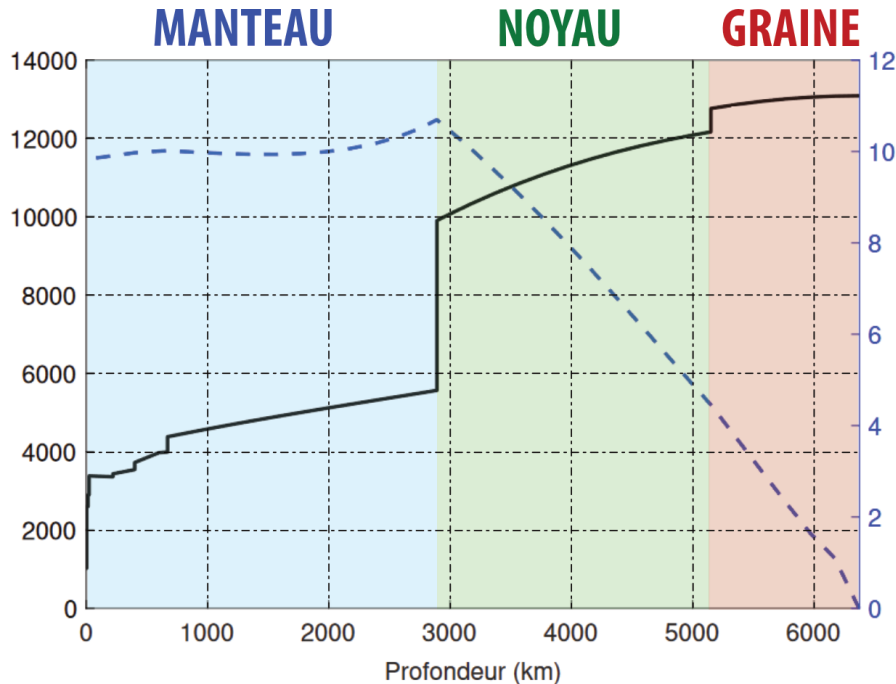
On admet ici que, quelle que soit la profondeur, la réponse des roches aux contraintes à long-terme est celle du fluage. Ceci permet de calculer la pression à n'importe quelle profondeur dans la Terre de la même manière qu'on calcule la pression hydrostatique dans un liquide incompressible. La seule différence est qu'on parle de *pression lithostatique*, car cette pression est due à la charge des roches au-dessus d'une profondeur donnée.

On se place dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  des coordonnées sphériques, dont l'origine  $O$  coïncide avec le centre de la Terre.

**Q47.** Énoncer sans démonstration le principe fondamental de la statique des fluides.

**Q48.** Justifier qu'à une profondeur donnée la pression lithostatique est partout la même.

En réalité, comme le montre la **Figure 12**, la masse volumique  $\mu$  des roches et l'accélération de pesanteur terrestre  $g$  varient avec la profondeur. On constate que la masse volumique des matériaux augmente brutalement lorsqu'on passe du manteau au noyau et entre le noyau et la graine. L'accélération de pesanteur reste quant à elle essentiellement constante dans le manteau, puis décroît continûment pour devenir nulle au centre de la Terre.



**Figure 12 :** Allure de l'évolution de la masse volumique  $\mu$  (courbe en trait plein) et de l'accélération de pesanteur  $g$  (courbe en pointillés) avec la profondeur dans la Terre (modèle PREM- les profondeurs sont approximatives).

**Q49.** On fait l'approximation que la masse volumique dans le manteau est uniforme, égale à sa valeur moyenne, notée  $\mu_{\text{manteau}}$ .

En exploitant la **Figure 12**, proposer une valeur de la masse volumique moyenne du manteau.

**Q50.** Déterminer la pression  $P(r)$  à l'intérieur du manteau. On négligera la pression qui règne à la limite supérieure du manteau. Calculer numériquement la pression  $P_M$  à la base du manteau, en  $r = R_M$  (on prendra  $R_M = 3490$  km). Commenter le résultat obtenu par rapport aux données fournies sur la **Figure 11**.

### Estimation de la taille de la graine

Le noyau, seule partie liquide au sein de la Terre, et la graine sont composés principalement de fer.

On se place dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  des coordonnées sphériques. On note  $\mu$  le champ de masse volumique des matériaux au sein de la Terre et on suppose cette distribution de masse de symétrie parfaitement sphérique.

**Q51.** Énoncer, à l'aide d'une phrase puis d'une équation, le théorème de Gauss de l'électrostatique.

**Q52.** En justifiant les analogies faites, en déduire l'expression du théorème de Gauss relatif au champ gravitationnel.

**Q53.** Par une étude des symétries et des invariances, déterminer la direction du champ de gravitation au sein de la Terre ainsi que la variable dont il dépend.

Pour simplifier les calculs, on admet, en première approximation, que la masse volumique est uniforme dans la graine et le noyau ; on la note  $\mu$ . Sa valeur numérique est prise égale à  $\mu = 11 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Q54.** En supposant la masse volumique uniforme dans la graine et le noyau, montrer que le champ de gravitation créé en un point quelconque du noyau ou de la graine s'écrit :

$$\vec{g}(r) = -\frac{4\pi\mu G}{3}r\vec{u}_r$$

On suppose que le fer liquide constituant le noyau est un fluide incompressible et homogène, au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

**Q55.** Montrer que le champ de pression au sein du noyau s'écrit, en notant  $P_M$  la pression à la limite noyau/manteau, limite située à un rayon  $R_M$  :

$$P(r) = P_M + \frac{2\pi\mu^2 G}{3}(R_M^2 - r^2)$$

**Q56.** En admettant que la température  $T_{\text{noyau}}$  dans le noyau vaut 5000 K et à l'aide des données fournies en début d'énoncé, calculer la valeur numérique du rayon de la graine, noté  $R_G$ . Commenter le résultat obtenu par rapport aux données de la **Figure 11**.

## II.B - Étude de la convection thermique au sein du noyau terrestre

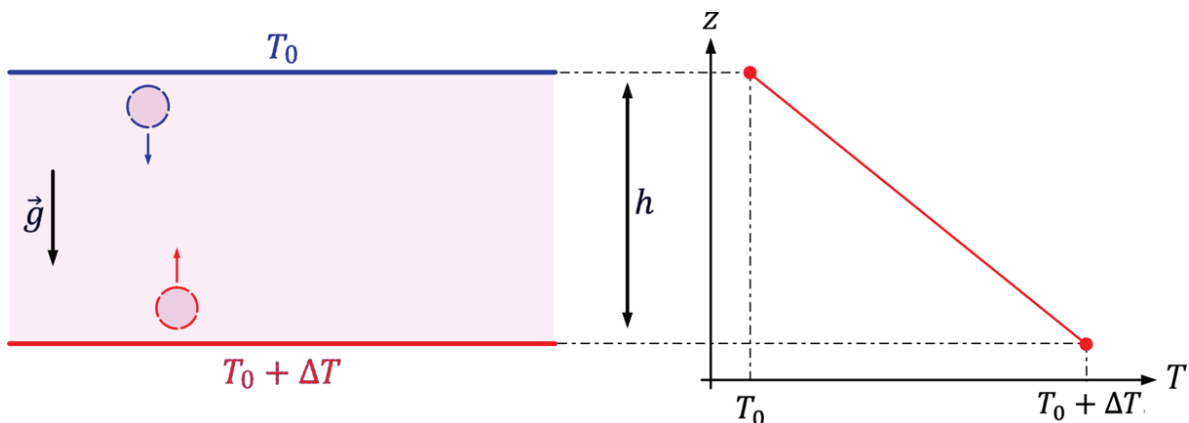
Dans le cas de notre planète, la composition chimique du noyau, ainsi que les hautes températures atteintes, impliquent des variations de densité de la graine vers le manteau. Ces variations induisent des mouvements de convection dans le noyau liquide.

Nous étudions dans cette dernière partie le processus de convection thermique. Ce phénomène peut se produire lorsqu'un fluide visqueux est soumis à un gradient de température correspondant à une augmentation de la température du haut vers le bas.

On se place dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  des coordonnées sphériques, dont l'origine  $O$  coïncide avec le centre de la Terre.

**Q57.** La température au sein de la Terre augmentant avec la profondeur, prévoir si la masse volumique du noyau liquide est une fonction croissante ou décroissante de la variable  $r$ .

Pour étudier les conditions nécessaires au développement d'une instabilité, on considère une couche de fluide du noyau terrestre, chauffée par le bas (face inférieure de température  $T_0 + \Delta T$ ) et refroidie par le haut (face de température  $T_0$ ), comme schématisé sur la **Figure 13**. On admet que la température varie linéairement entre les deux limites de la couche entre  $T_0$  et  $T_0 + \Delta T$ . On suppose de plus que la viscosité, notée  $\eta_0$ , est uniforme et on néglige l'influence de la pression sur la masse volumique  $\mu$  du fluide.



**Figure 13 :** Géométrie envisagée pour l'étude de la stabilité du noyau terrestre et évolution du profil de température.

Pour analyser la stabilité de la couche, on isole par la pensée une petite sphère de fluide du noyau, de rayon  $a$ . On suppose qu'à l'instant initial, la sphère se situe en contact avec la face supérieure de la couche d'étude avec une vitesse nulle et qu'elle est en équilibre thermique avec celle-ci. Elle possède donc une température  $T_0$  et une masse volumique  $\mu_{\text{sphère}} = \mu(T_0)$ . On néglige les échanges thermiques de la sphère avec la couche : sa température reste constante.

On admet par ailleurs pour simplifier que l'intensité du champ de gravitation est uniforme.

**Q58.** Justifier que la résultante du poids et de la poussée d'Archimède agissant sur la sphère est dirigée vers le bas et que la sphère descend jusqu'à la limite inférieure de la couche.

Du fait de sa viscosité, le fluide environnant exerce sur la particule une force de frottement fluide, modélisée par la loi de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta_0 a \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  désigne le vecteur vitesse de la particule de fluide.

**Q59.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la sphère en admettant pour simplifier que la force d'Archimède qu'elle subit est constante et correspond à celle exercée par le fluide extérieur de masse volumique à la température moyenne  $T_0 + \Delta T/2$ .

**Q60.** Montrer que la vitesse de la sphère tend vers une valeur limite dont on donnera l'expression.

*Pour simplifier, on pourra poser :*

$$\mu\left(T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right) - \mu(T_0) \cong \frac{\Delta T}{2} \times \frac{d\mu}{dT}(T_0) = \frac{\Delta T}{2} \times \mu'(T_0)$$

**Q61.** Exprimer en ordre de grandeur le temps  $\tau$  nécessaire pour que la vitesse limite soit atteinte, en fonction des paramètres du problème.

**Q62.** En admettant que sa vitesse est égale à sa vitesse limite durant tout le mouvement, déterminer le temps  $\Delta t_1$  mis par la sphère pour parcourir la distance  $h$ . Prévoir le comportement de la sphère lorsqu'elle atteint la partie inférieure de la couche d'étude.

**Q63.** Par analogie, préciser le mouvement d'une sphère qui serait initialement située au niveau de la face inférieure de la couche d'étude, en équilibre thermique à la température  $T_0 + \Delta T$ .

En réalité, en se déplaçant au sein de la couche de noyau d'épaisseur  $h$ , la température de la sphère tend à se rapprocher par diffusion thermique de celle du fluide environnant.

**Q64.** Prévoir le comportement de la sphère lorsque sa température est exactement égale à celle du fluide dans lequel elle est plongée.

**Q65.** À l'aide d'un bilan d'énergie, démontrer l'équation de diffusion thermique dans un milieu de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$ , en négligeant toute production interne d'énergie.

La diffusion thermique dans un milieu est donc caractérisée par son coefficient de diffusivité thermique  $D_{\text{th}}$ , dont l'expression est donnée par :

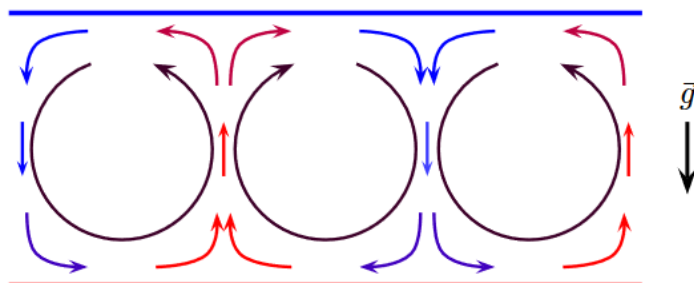
$$D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu c}$$

**Q66.** En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer en ordre de grandeur le temps  $\Delta t_2$  nécessaire pour que la sphère de rayon  $a$  acquière une température égale à celle de son environnement.

**Q67.** En comparant les temps  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$ , trouver une condition pour que la sphère de rayon  $a$  partant de la limite supérieure puisse parvenir à la limite inférieure de la couche. Exprimer cette condition en faisant apparaître une quantité sans dimension que l'on exprimera en fonction de  $g, \eta_0, \mu'(T_0), \Delta T, h, a$  et  $D_{\text{th}}$ .

**Q68.** Montrer que si la condition précédente est vérifiée, la sphère est animée d'un mouvement périodique dont on précisera la période, en ordre de grandeur, en fonction des temps  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$ .

Dans le noyau terrestre, on observe dans certains cas un mouvement de convection au sein du noyau, présentant une géométrie ordonnée en cellules régulières, dont les parois forment des courants ascendants ou descendants (**Figure 14**).



**Figure 14 :** Convection thermique observée dans le noyau terrestre (travaux de Thierry Menand - Université Clermont Auvergne).

Une analyse hydrodynamique et thermique plus précise, due notamment au physicien Rayleigh en 1916, montre que le régime de convection s'établit si le nombre de Rayleigh  $\mathcal{R}a$  défini par  $\mathcal{R}a = \frac{g\mu'(T_0)\Delta T}{\eta_0 D_{th}} h^3$  vérifie :

$$\mathcal{R}a \geq \frac{27}{4}\pi^4 \cong 658 .$$

**Q69.** Discuter la compatibilité du modèle simple développé dans cette partie avec le résultat de Rayleigh.

Fin