Notations et notions utilisées dans le problème

Ce problème est consacré à l'étude de la notion d'indice d'une courbe plane fermée, qui sera abordée de deux manières différentes avant de donner lieu à quelques applications.

- ▷ Nous désignons par **N** (resp. **Z**, resp. **R**, resp. **C**) l'ensemble des nombres entiers naturels (resp. nombres entiers relatifs, resp. nombres réels, resp. nombres complexes).
- ▷ Dans tout le sujet, **C** est vu à la fois comme un **R**-espace vectoriel normé (le module étant choisi comme norme) ou comme espace affine de dimension 2. Un nombre complexe peut donc être nommé vecteur ou point selon la structure envisagée.
- ▷ Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$, le segment $[\alpha, \beta]$ est l'ensemble $\{\alpha + x.(\beta - \alpha) \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
- ▷ Pour $(a, b) \in \mathbf{N}^2$, nous notons $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Notations et notions utilisées dans les parties I et II

La droite numérique achevée $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est notée $\overline{\mathbf{R}}$ et est munie de la relation d'ordre usuelle notée $\leqslant$ prolongeant l'ordre usuel sur **R** noté aussi $\leqslant$. En particulier : $\forall x \in \mathbf{R}\,,\ -\infty < x < +\infty$.

Nous désignons par $\mathbf{R}[X]$ (resp $\mathbf{R}(X)$) l'algèbre des polynômes réels (resp. des fractions rationnelles réelles) en l'indéterminée X. Pour toute fraction $F \in \mathbf{R}(X)$ nous notons $\widetilde{F}$ la fonction rationnelle associée à F.

Dans les parties I et II, nous définissons la notion d'indice d'une fraction rationnelle sur un intervalle. Nous nous intéressons plus précisément à l'indice de la fraction $\dfrac{P'}{P}$ où P est un polynôme réel non-nul, P' son polynôme dérivé, et nous étudions le lien entre l'indice et les racines de P.

Notations et notions utilisées dans les parties III et IV

- ▷ Nous notons **U** l'ensemble des nombres complexes de module 1.
- ▷ L'application Arctan $: \mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (resp. Arccotan $: \mathbf{R} \to]0, \pi[$) est la fonction réciproque de la restriction de $\dfrac{\sin}{\cos}$ à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (resp. de $\dfrac{\cos}{\sin}$ à $]0, \pi[$).
- ▷ Un arc paramétré **régulier** est une application $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) telle que $\forall t \in \mathbf{R}\,,\ z'(t) \neq 0$. Pour $t \in \mathbf{R}$, le **vecteur tangent unitaire** à l'arc au point $z(t)$ est : $\boldsymbol{\tau}(t) = \dfrac{z'(t)}{|z'(t)|}$. La courbe $\Gamma = z(\mathbf{R})$ est encore appelée le **support** de l'arc z.
- ▷ Un arc $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est dit **fermé** si z est périodique de (plus petite) période ℓ (réel strictement positif). Cet arc fermé est dit **simple** si la restriction de z à l'intervalle $[0, \ell[$ est injective.
- ▷ Un arc $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ fermé simple et régulier de classe $\mathscr{C}^k$ est appelé un **arc de Jordan** de classe $\mathscr{C}^k$.

Nous définissons dans la partie IV une autre notion d'indice appelée indice de rotation d'une courbe fermée orientée. La valeur de cet indice est donnée par le théorème de Hopf dont la preuve fait l'objet de la fin de ce problème.

Partie I : indice algébrique

Pour tout nombre réel c et toute fraction rationnelle $F \in \mathbf{R}(X)$, nous posons :

$$I_c(F) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lim\limits_{x \to c^-} \widetilde{F}(x) = \lim\limits_{x \to c^+} \widetilde{F}(x) \\ 1 & \text{si} \quad \lim\limits_{x \to c^-} \widetilde{F}(x) < \lim\limits_{x \to c^+} \widetilde{F}(x) \\ -1 & \text{si} \quad \lim\limits_{x \to c^-} \widetilde{F}(x) > \lim\limits_{x \to c^+} \widetilde{F}(x) \end{cases}$$

Si a et b sont deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$ avec $a < b$, alors nous définissons l'indice de F sur $]a, b[$ ainsi :

$$I_a^b(F) = \sum I_c(F)$$

où la somme porte sur tous les nombres réels c de l'intervalle **ouvert** $]a, b[$.

A) Indice et nombre de racines

1. Soit $(c, d) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et soit $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la valeur de $I_c\left(\dfrac{d}{(X-c)^k}\right)$.
2. Soient F, G et H trois éléments de $\mathbf{R}(X)$ tels que : $F = G + H$. Supposons qu'un nombre réel c soit un pôle commun à F et G et ne soit pas un pôle de H. Vérifier l'égalité : $I_c(F) = I_c(G)$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ avec $P \neq 0$. Soit c une racine réelle de P (simple ou multiple).
   Posons $F = \dfrac{P'}{P}$ (où P' désigne le polynôme dérivé de P). Déterminer $I_c(F)$.
   En déduire l'égalité : $\operatorname{Card} \left\{ x \in \mathbf{R} \,/\, \widetilde{P}(x) = 0 \right\} = I_{-\infty}^{+\infty}(F)$.

B) Indice d'une ligne polygonale fermée

Soient α et β deux nombres complexes <u>non-réels</u> et <u>distincts</u>.
Nous définissons l'**indice du segment** $[\alpha, \beta]$ orienté de α vers β comme :

$$I_{[\alpha,\beta]} = \frac{1}{2} I_0^1 \left(\frac{\operatorname{Re}(\alpha) + X.\operatorname{Re}(\beta - \alpha)}{\operatorname{Im}(\alpha) + X.\operatorname{Im}(\beta - \alpha)} \right)$$

Soit $(\alpha_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une suite finie de n ($n \in \mathbf{N}$ et $n \geqslant 3$) nombres complexes non-réels distincts deux à deux. On considère la ligne polygonale fermée orientée L de sommets successifs $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ (avec $\alpha_{n+1} = \alpha_1$, traduisant le caractère fermé de L), et on suppose que L n'est pas croisée (i.e. deux segments distincts ne peuvent s'intersecter qu'en leur sommet commun s'il existe) et qu'elle ne rencontre pas le complexe nul.
L'indice de L est alors par définition :

$$I_L = \sum_{k=1}^{n} I_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}$$

4. Que vaut $I_{[\alpha,\beta]}$ lorsque le segment $[\alpha, \beta]$ n'intersecte pas l'axe des réels ?
5. Supposons qu'un segment $[\alpha, \beta]$ rencontre l'axe des réels en un point $t \in \mathbf{R}^*$.
   Déterminer la valeur de $I_{[\alpha,\beta]}$ en discutant selon les signes de t et de $\operatorname{Im}(\beta - \alpha)$ (dessiner les quatre situations).
6. Posons : $p = \operatorname{Card} \{ k \in [\![1, n]\!] \,/\, [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \cap \mathbf{R}^* \neq \varnothing \}$.
   (a) Sachant que la ligne polygonale L est fermée, déterminer la parité de p.
   (b) Lorsque n vaut 3 (ligne polygonale triangulaire), déterminer les valeurs possibles pour p et calculer l'indice correspondant de L en illustrant par des figures les différents cas.

(c) Trouver une ligne polygonale L vérifiant $n - p = 2$ et ayant un indice non nul que l'on précisera. Une figure soignée pourra tenir lieu de réponse.

(d) Émettre dans le cas général une conjecture sur les valeurs que peut prendre l'indice d'une ligne polygonale fermée non croisée.

Partie II : suite de Sturm

C) Formule de Cauchy

On commence par définir précisément le nombre de changements de signe dans une suite finie d'éléments de $\overline{R}$.

▷ Soit $(x, y) \in \overline{\mathbf{R}}^2$. Posons

$$S(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x < 0 < y) \quad \text{ou} \quad (y < 0 < x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple : $S(+\infty, -\infty) = 1$ et $S(0, -\infty) = 0$.

▷ Si $x_0, \ldots, x_n$ sont $n+1$ éléments de $\overline{\mathbf{R}}$ ($n \in \mathbf{N}$), alors la somme $S(x_0, x_1) + S(x_1, x_2) + \cdots + S(x_{n-1}, x_n)$ est notée

$$S(x_0, \ldots, x_n)$$

▷ Si $(A_0, \ldots, A_n) \in (\mathbf{R}[X])^{n+1}$ et $a < b$ (a et b éléments de $\overline{\mathbf{R}}$) , alors $S_a^b(A_0, \ldots, A_n)$ désigne la différence :

$$S(\widetilde{A_0}(a), \ldots, \widetilde{A_n}(a)) - S(\widetilde{A_0}(b), \ldots, \widetilde{A_n}(b))$$

(où $\widetilde{A_k}(a)$ (resp. $\widetilde{A_k}(b)$) désigne la limite de $\widetilde{A_k}$ en a (resp. b)).

7. Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbf{R}(X)$. Soient $a < c < b$ trois éléments de $\overline{\mathbf{R}}$. Dans quel cas a-t-on : $I_a^b(F) = I_a^c(F) + I_c^b(F)$?

8. Soient a et b deux éléments fixés de $\overline{\mathbf{R}}$ avec $a < b$. Soient A et B deux éléments de $\mathbf{R}[X]$ premiers entre eux n'ayant ni a ni b pour racines réelles. Nous souhaitons démontrer la formule :

$$I_a^b(\frac{A}{B}) + I_a^b(\frac{B}{A}) = S_a^b(A, B)$$

(a) Vérifier la formule dans le cas où A et B n'ont pas de racine dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

(b) Traiter le cas où A possède une seule racine réelle c dans l'intervalle $]a, b[$ et B n'a aucune racine dans cet intervalle.

(c) Considérer enfin le cas où les racines réelles dans l'intervalle $]a, b[$ du polynôme AB sont $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ ($n \in \mathbf{N}$ et $n \geqslant 2$).

D) Nombre de racines réelles

Soit A un élément de $\mathbf{R}[X]$ de degré au moins 2 et premier avec A' (polynôme dérivé de A).
Posons : $A_0 = A$ et $A_1 = A'$. Nous considérons alors le nombre entier naturel n ($n \geqslant 2$) et les deux suites finies de polynômes $(A_0, A_1, \ldots A_n, A_{n+1}) \in (\mathbf{R}[X])^{n+2}$ et $(B_1, \ldots, B_n) \in (\mathbf{R}[X])^n$ définis par :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!] \, , \, A_k = A_{k+1}.B_{k+1} - A_{k+2} \\ \forall k \in [\![0, n]\!] \, , \, \deg A_{k+1} < \deg A_k \\ A_{n+1} = 0 \end{cases}$$

9. **(a)** Justifier l'existence de ces polynômes.

   (b) Démontrer que A_n est un polynôme constant non nul.

   (c) Démontrer qu'on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \forall x \in \mathbf{R}\,,\ \left(\widetilde{A}_{k+1}(x) = 0 \Rightarrow \widetilde{A}_k(x)\widetilde{A}_{k+2}(x) < 0\right)$$

10. Déterminer, pour tout réel c et tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, la valeur de $I_c(\frac{A_k}{A_{k+1}}) + I_c(\frac{A_{k+2}}{A_{k+1}})$.

11. En déduire le résultat suivant :

$$\text{Card}\ \left\{x \in \mathbf{R}\ /\ \widetilde{A}(x) = 0\right\} = S_{-\infty}^{+\infty}(A_0, A_1, \dots, A_n)$$

E) Indice et signature

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Considérons deux suites réelles $(a_k)_{k\in[\![0,n+1]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ telles que : $\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ a_k + a_{k+2} = a_{k+1}.b_{k+1} \\ \forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_k \neq 0 \\ a_{n+1} = 0 \end{cases}$

Introduisons les deux matrices suivantes : $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\,,\ m_{i,j} = \begin{cases} b_i & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\,,\ p_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad j \leqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

12. Notons ${}^tP$ la matrice transposée de la matrice P.
    Effectuer le produit matriciel ${}^tP.M$ et exprimer les coefficients non-nuls en fonction des réels a_k.

13. Démontrer que le produit ${}^tP.M.P$ est une matrice diagonale.

14. Trouver la valeur du déterminant de la matrice M en fonction de a_0 et a_n.

15. Si S est une matrice symétrique réelle d'ordre n et si le couple d'entiers (p, q) est la signature de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ canoniquement associée à S, alors nous posons : $\sigma(S) = p - q$.

    (a) Justifier l'égalité : $\sigma(M) = \sigma({}^tP.M.P)$

    (b) Avec les notations introduites en II. D), pour $x \in \mathbf{R}$, nous posons : $\begin{cases} \forall k \in [\![0, n+1]\!]\,,\ a_k = \widetilde{A}_k(x) \\ \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ b_k = \widetilde{B}_k(x) \end{cases}$

    La matrice M correspondante est alors notée $M(x)$. Justifier l'égalité :

$$\text{Card}\ \left\{x \in \mathbf{R}\ /\ \widetilde{A}(x) = 0\right\} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} \sigma(M(x)) - \lim_{x\to-\infty} \sigma(M(x))\right)$$

Tournez la page S.V.P.

Partie III : théorème de relèvement

Nous admettons le théorème suivant :

Théorème (de relèvement)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbf{U}$ est une application continue, alors il existe une application continue $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ telle que*

$$\forall t \in [a, b]\,,\ f(t) = \exp(\mathrm{i}.\alpha(t))\ .$$

La fonction α est appelée un **relèvement continu** *de l'application f sur $[a, b]$.*

Nous remplaçons désormais le segment $[a, b]$ par un compact de $\mathbf{C}$:
Soit K un compact de $\mathbf{C}$ contenant 0 et étoilé par rapport à 0 (c'est-à-dire : $\forall z \in K\,,\ [0, z] \subset K$).
Considérons $F : K \to \mathbf{U}$ continue sur K et notons θ un argument de $F(0)$.
Le but de cette partie est de montrer l'existence d'une application continue $\alpha : K \to \mathbf{R}$ telle que :

$$\alpha(0) = \theta \quad \text{et} \quad \forall z \in K\,,\ F(z) = \exp(\mathrm{i}.\alpha(z))$$

Si z est un élément quelconque de K, nous considérons l'application $F_z : [0, 1] \to \mathbf{U}$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1]\,,\ F_z(t) = F(t.z)$$

Nous notons $X_z : [0, 1] \to \mathbf{R}$ (resp. $Y_z : [0, 1] \to \mathbf{R}$) la partie réelle (resp. partie imaginaire) de F_z.

16. Soit $z \in K$. Justifier l'existence d'une unique application continue $\alpha_z : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telle que : $\alpha_z(0) = \theta$ et $\forall t \in [0, 1]\,,\ F(t.z) = \exp(\mathrm{i}.\alpha_z(t))$.

17. Notons $\alpha : K \to \mathbf{R}$ l'application définie par : $\forall z \in K\,,\ \alpha(z) = \alpha_z(1)$.
Vérifier : $\exp(\mathrm{i}.\alpha) = F$ et $\alpha(0) = \theta$.
La preuve de la continuité de α est l'objet de ce qui suit.

18. L'ensemble des nombres complexes dont un argument appartient à $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ est noté S_0.
Posons alors : $S_1 = \mathrm{i}.S_0 = \{\mathrm{i}.z \,/\, z \in S_0\}$; $S_2 = \mathrm{i}.S_1$; $S_3 = \mathrm{i}.S_2$.
Soit z un élément fixé de K.

- **(a)** Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0, 1]$ tels que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un secteur S_j ($j \in [\![0, 3]\!]$) contenant $F_z([t_i, t_{i+1}])$.
- **(b)** Démontrer l'existence d'un réel strictement positif δ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall w \in K\,,\ \left[|z - w| < \delta \Rightarrow \forall t \in [0, 1]\,,\ |F_z(t) - F_w(t)| < \frac{1}{2}\right]$$

19. On considère maintenant les quatre demi-plans H_0, H_1, H_2 et H_3 définis ainsi :
$H_0 = \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}$, $H_1 = \mathrm{i}.H_0$, $H_2 = \mathrm{i}.H_1$ et $H_3 = \mathrm{i}.H_2$.
On choisit aussi un élément w de K tel que : $|z - w| < \delta$.

- **(a)** Démontrer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un demi-plan H_j ($j \in [\![0, 3]\!]$) contenant à la fois $F_z([t_i, t_{i+1}])$ et $F_w([t_i, t_{i+1}])$.
- **(b)** Supposons que $F_z([t_0, t_1])$ et $F_w([t_0, t_1])$ soient tous deux inclus dans H_0. Démontrer que

$$\forall t \in [t_0, t_1]\,,\ \alpha_z(t) - \alpha_w(t) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{Y_z(t)}{X_z(t)}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{Y_w(t)}{X_w(t)}\right)\ .$$

- **(c)** Supposons $n \geqslant 2$ et $F_z([t_1, t_2])$ et $F_w([t_1, t_2])$ tous deux inclus dans H_0, ou tous deux inclus dans H_1 ou tous deux inclus dans H_3.
Dans chacun de ces trois cas, donner, à l'aide uniquement des fonctions Arctan et Arccotan, une expression analogue à celle trouvée précédemment de $\alpha_z(t) - \alpha_w(t)$ valable pour tout réel $t \in [t_1, t_2]$.
- **(d)** En déduire la continuité de α en z.

Partie IV : théorème de Hopf

Le théorème suivant est admis :

Théorème (d'équivalence des arcs). *Si $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ et $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sont deux arcs de Jordan de même support Γ de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$), alors il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ tel que $z = w \circ \varphi$.*
Si φ est croissante, alors nous disons que z et w confèrent la même orientation à Γ et nous parlons alors de courbe orientée.

F) Indice de rotation

Soit Γ le support d'un arc de Jordan $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et de période $\ell > 0$.
Soit α un relèvement continu du vecteur tangent unitaire $\boldsymbol{\tau}$ sur $[0, \ell]$.
Nous définissons l'**indice de rotation** de z selon α comme étant le nombre réel suivant :

$$\mathrm{I}_{z,\alpha} = \frac{\alpha(\ell) - \alpha(0)}{2\pi}$$

20. Justifier que $\mathrm{I}_{z,\alpha}$ est un nombre entier relatif.

21. Soit $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\forall t \in [k\ell, (k+1)\ell[$, $A(t) = 2k\pi.\mathrm{I}_{z,\alpha} + \alpha(t - k\ell)$

- **(a)** Démontrer que A est un relèvement continu de $\boldsymbol{\tau}$ sur $\mathbf{R}$.
- **(b)** Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Démontrer que si β est un relèvement continu de $\boldsymbol{\tau}$ sur $[t_0, t_0 + \ell]$, alors le quotient $\dfrac{\beta(t_0 + \ell) - \beta(t_0)}{2\pi}$ vaut $\mathrm{I}_{z,\alpha}$.

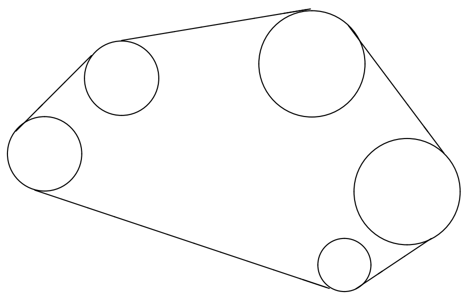
Il est donc inutile de faire référence au relèvement continu de $\boldsymbol{\tau}$ choisi.
Nous notons donc désormais I_z au lieu de $\mathrm{I}_{z,\alpha}$.

22. Soit $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un arc de Jordan de classe $\mathscr{C}^1$ de support Γ de même orientation que z.
Démontrer que z et w ont le même indice de rotation.

Par conséquent, nous pouvons définir l'indice de rotation de la courbe orientée Γ par : $\mathrm{I}_\Gamma = \mathrm{I}_z$.

23. Soit Γ' l'image de Γ par une similitude directe plane. Comparer les indices de Γ' et de Γ.

24. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Un système de n poulies (assimilées à des cercles) tournant dans le sens antihoraire entraîne une courroie C tendue (assimilée à une courbe fermée C) entourant toutes ces poulies.



- **(a)** Pour $n = 1$, calculer I_C.
- **(b)** Pour $n \geqslant 2$, déterminer I_C.

25. Supposons z de classe $\mathscr{C}^2$. Notons L la longueur de Γ.

- **(a)** Démontrer que la fonction « abscisse curviligne » $s : [0, \ell] \to [0, L]$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$.
- **(b)** Démontrer que :

$$\mathrm{I}_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^\ell \frac{\boldsymbol{\tau}'(t)}{\boldsymbol{\tau}(t)}\,\mathrm{d}t$$

où $\gamma(s)$ représente la courbure de l'arc au point d'abscisse curviligne s.

Tournez la page S.V.P.

G) Valeur de l'indice

Soit $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un arc de Jordan de classe $\mathscr{C}^1$ de support Γ de période $\ell > 0$. Nous allons calculer I_Γ.

26. Démontrer qu'il est possible de réduire l'étude à un arc z vérifiant les conditions supplémentaires :

$$z(0) = 0 \quad , \quad z'(0) \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbf{R}\,, \begin{cases} |z'(t)| = 1 \\ \mathrm{Im}(z(t)) \geqslant 0 \end{cases}$$

Dans la suite, nous considérons le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ suivant : $T = \left\{ s + \mathrm{i}.t \;/\; (s,t) \in [0,\ell]^2 \text{ et } s \leqslant t \right\}$, puis nous définissons l'application $f : T \to \mathbf{C}$ par

$$\forall \xi \in T\,,\; f(\xi) = \begin{cases} -z'(0) & \text{si} \quad \xi = \mathrm{i}.\ell \\ z'(s) & \text{si} \quad s = \mathrm{Re}(\xi) = \mathrm{Im}(\xi) \\ \dfrac{z(t) - z(s)}{|z(t) - z(s)|} & \text{sinon} \quad (\text{où } (s,t) = (\mathrm{Re}(\xi), \mathrm{Im}(\xi))\,) \end{cases}$$

27. **(a)** Justifier que f est bien définie.

(b) Soient $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Déterminer, pour $s_0 \in [0, \ell]$, les limites suivantes (avec $s < t$) :

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,s_0)} \frac{x(t) - x(s)}{t - s} \quad \text{et} \quad \lim_{(s,t)\to(s_0,s_0)} \frac{y(t) - y(s)}{t - s}$$

En déduire la continuité de f au point $s_0 + \mathrm{i}.s_0$.

(c) Démontrer que f est continue au point $\mathrm{i}.\ell$.

28. Justifier l'existence d'une application $\Phi : T \to \mathbf{R}$ continue sur T telle que :

$$\Phi(0) \in \{0, \pi\} \quad \text{et} \quad \forall \xi \in T\,,\; f(\xi) = \exp(\mathrm{i}.\Phi(\xi))$$

29. Démontrer que l'application $s \mapsto f(s + \mathrm{i}\ell)$ (définie sur $[0, \ell]$) ne prend pas la valeur complexe i.
En déduire l'égalité : $\Phi(\ell + \mathrm{i}.\ell) - \Phi(\mathrm{i}.\ell) = \pi.z'(0)$
et montrer, par un argument du même type, la seconde égalité : $\Phi(\mathrm{i}.\ell) - \Phi(0) = \pi.z'(0)$.

30. En déduire : $\mathrm{I}_\Gamma = 1$ ou $\mathrm{I}_\Gamma = -1$ (Théorème de Hopf)

———— FIN DU SUJET ————