EDHEC 2022, voie E

Une solution proposée par Frédéric Gaunard (ENC Bessières, Paris 17e - frederic@gaunard.com).

Exercice 1

(1) Le produit de matrices 2×2 est encore une matrice 2×2 ainsi que la différence de telles matrices donc déjà, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il reste à montrer que l'application est aussi linéaire. Soient alors M, N deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α, β deux réels. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha M + \beta N) &= J(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)J \\
&= \alpha JM + \beta JN - \alpha MJ - \beta NJ \\
&= \alpha(JM - MJ) + \beta(JN - NJ) \\
&= \alpha\varphi(M) + \beta\varphi(N)
\end{aligned}$$

et φ est bien linéaire : c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) (a) On calcule les produits des matrices de la base canonique avec J.

$$\begin{aligned}
\varphi(K_1) &= JK_1 - K_1J \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -K_2 + K_3
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$\varphi(K_2) = -K_1 + K_4$$

$$\varphi(K_3) = K_1 - K_4$$

$$\varphi(K_4) = K_2 - K_3$$

(b) La matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) a pour $i-$ième colonne le vecteur colonne qui représente les coordonnées du vecteur $\varphi(K_i)$ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) : il s'agit des coefficients trouvés ci-avant, disposés en colonnes. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice A est symétrique: elle est donc, tout comme l'endomorphisme φ qu'elle représente, diagonalisable d'après un résultat du cours.

(3) (a) Le rang de A est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. On voit qu'il y a deux paires de colonnes liées (la quatrième est opposée de la première, la troisième de la seconde).

Les deux colonnes restantes sont aussi clairement non colinéaires donc forment une base de l'image qui est alors de dimension 2. On a donc

$$\mathrm{rg}(A) = 2.$$

De plus

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(K_1 - K_4; K_2 - K_3).$$

(b) D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(\varphi) = 4 - 2 = 2.$$

Or, $\varphi(I) = J - J = 0$ donc $I \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\varphi(J) = J^2 - J^2 = 0$ donc on a aussi $J \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a deux matrices qui sont éléments d'un (sous-)espace vectoriel de dimension 2. Ces deux matrices sont (clairement) non colinéaires : la famille (I, J) forme donc une base du noyau de φ.

(4) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4A$$

ce qui donne bien $A^3 - 4A = 0$.

(b) La question précédente permet d'affirmer que le polynôme $X^3 - 4X$ annule A. Il admet pour racines 0, -2 et 2. Le cours nous permet donc de conclure que ce sont les seules valeurs propres **possibles** pour φ. (Il faut encore vérifier qu'elles le sont bien.)

$$\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{0, -2, 2\}.$$

(5) Les commandes `SciLab` proposées permettent d'obtenir le rang des deux matrices $A - 2I$ et $A + 2I$. Ce rang permet d'en déduire la dimension du noyau (toujours grâce au théorème du rang) de ces mêmes matrices et donc de savoir d'une part si 2 et -2 sont bien des valeurs propres (avec un rang strictement inférieur à 4 et donc un noyau de dimension supérieure ou égale à 1) et ensuite de connaitre la dimension des sous-espaces propres le cas échéant.
On peut déduire de l'affichage que 2 et -2 sont bien valeurs propres de A et que les deux sous-espaces propres associés sont chacun de dimension 1 (car $4 - 3 = 1$).

(6) (a) On résout:

$$AX = 2X \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-y+z &=& 0\\ -x-2y+t &=& 0\\ x-2z-t &=& 0\\ y-z-2t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-y+z &=& 0\\ -3y-z+2t &=& 0\\ -y-3z-2t &=& 0\\ y-z-2t &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-y+z &=& 0\\ y-z-2t &=& 0\\ -3y-z+2t &=& 0\\ -y-3z-2t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-y+z &=& 0\\ y-z-2t &=& 0\\ -4z-4t &=& 0\\ -4z-4t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& -y+z=-2t\\ y &=& z+2t=t\\ z &=& -t\end{array}\right.$$

$$\iff X = t\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

De même,

$$AX = -2X \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 0\\ -x+2y+t &=& 0\\ x+2z-t &=& 0\\ y-z+2t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 0\\ 3y+z+2t &=& 0\\ y+3z-2t &=& 0\\ y-z+2t &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 0\\ y-z+2t &=& 0\\ 3y+z+2t &=& 0\\ y+3z-2t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 0\\ y-z+2t &=& 0\\ 4z-4t &=& 0\\ 4z-4t &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& y-z=-2t\\ y &=& z-2t=-t\\ z &=& t\end{array}\right.$$

$$\iff X = t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

(b) On peut donc conclure que $\mathrm{Sp}(\varphi)=\{0,2,-2\}$ car on sait d'après des questions précédentes que 0 est bien valeur propre (le noyau de φ n'est pas réduit à $\{0\}$: il est de dimension 2) et que 2 et -2 sont bien valeurs propres. De plus,

$$E_0 = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(I, J), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right), \qquad E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 2

(1) On va donc augmenter la valeur du niveau du joueur tant que celui-ci n'est pas égal au niveau final (auquel cas on s'arrête car on a fini le jeu) **et** tant que le niveau en cours est réussi (avec probabilité p). Ceci donne donc le script suivant

```
p=input('p=?')
n=input('n=?')
X=0 // on n'accède pas forcément au premier niveau
while X < n & rand() <= p
    X=X+1
end
disp(X)
```

(2) (a) On peut échouer dès le premier niveau, auquel cas $X_n = 0$. On peut réussir chacun des n niveaux, ce qui donne $X_n = n$. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles; pour atteindre le niveau k (avec $k \in [\![1, n-1]\!]$), il faut avoir réussit les k premiers niveaux et échoué au niveau $k+1$. On a bien $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

(b) $[X_n = 0]$ correspond à un échec dès le premier niveau, ce qui arrive avec probabilité $1-p$. Ainsi,

$$P(X_n = 0) = 1 - p = q.$$

(c) On a clairement

$$[X_n = n] = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n.$$

D'après la description de l'énoncé, on a

$$P_{R_j}(R_{j+1}) = p$$

et même plus, il apparait qu'on peut interpréter le sujet comme

$$P_{\cap_{i=1}^{j} R_i}(R_{j+1}) = P_{R_j}(R_{j+1}) = p.$$

Ceci permet, à l'aide de la formule des probabilités composées, d'écrire

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P\left(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n\right) \\ &= P(R_1) P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{\cap_{i=1}^{n-1} R_i}(R_n) \\ &= p \times p \times \cdots \times p = p^n \end{aligned}$$

(d) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. On a alors, toujours avec la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R}_{k+1}) \\ &= P(R_1) P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{\cap_{j=1}^{k-1} R_j}(R_k) P_{\cap_{j=1}^{k} R_j}(\overline{R}_{k+1}) \\ &= p \times p \times \cdots \times p \times q \\ &= p^k q \end{aligned}$$

On constate que pour $k = 0$, on a $p^k q = q = P(X_n = 0)$ et la formule s'étend donc à $k = 0$.

(3) On vérifie sans difficulté avec les formules de somme géométrique du cours de première année

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^k q + p^n \\ &= q \times \frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1 - p^n + p^n \\ &= 1,\end{aligned}$$

comme attendu.

(4) (a) X_n est une variable aléatoire qui ne prend qu'un nombre **fini** de valeurs; elle admet donc nécessairement une espérance (il n'y pas de convergence de série qui entre en jeu). Cette espérance vaut

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kqp^k + np^n = (1-p)p \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n.$$

(b) La somme $\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}$ correspond à la somme partielle de la série géométrique dérivée de raison p qu'on sait être convergente et dont on connait la somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q^2}.$$

Comme, par croissance comparée $np^n \to 0$, $n \to +\infty$, il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = qp \times \frac{1}{q^2} = \frac{p}{q}.$$

(5) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Soit alors $n \geq k+1$. On a $k \leq n-1$ donc ce qui précède permet d'affirmer sans nouveau calcul que

$$P(X_n = k) = p^k q.$$

(b) Lorsque $n \to +\infty$, il est notamment plus grand que $k+1$. Il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = p^k q.$$

En introduisant une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = k) = p^k q$ (qui en est bien une : on vérifie aisément que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

grâce à la formule sur la série géométrique de raison p), on voit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

c'est à dire que X_n converge en loi vers X.

(c) En notant $Y = X + 1$, on obtient une loi géométrique de paramètre q. C'est classique, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k-1) = p^{k-1}q.$$

Le cours permet alors de donner directement l'espérance de Y : $E(Y) = \dfrac{1}{q}$.

Par linéarité de l'espérance on a donc

$$E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q} = \lim_{n \to +\infty} E(X_n).$$

Exercice 3

(1) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

La fonction f_n est un quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$, elle est donc dérivable sur ce même intervalle et, pour tout $x \in [0;1]$,

$$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

ainsi la fonction est strictement croissante sur $[0;1]$. Comme $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1/(1+n)$, on peut dresser le tableau de variations suivant

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n+1}$

(2) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} \mathrm{d}x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}, \qquad \text{et donc} \quad 0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on a alors

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} \mathrm{d}x = \frac{1}{n(n+1)}$$

ce qui est bien l'encadrement demandé.

(3) Il est immédiat de voir que $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}, \quad n \to +\infty.$

Or, la série de terme général $1/n^2$ est convergente (critère de Riemann). Par critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, on peut donc affirmer que la série de terme général u_n est également convergente.

(4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(a) La suite (S_n) représente la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n que l'on sait être convergente par la question précédente. Par définition de la convergence d'une série, la suite (S_n) est bien convergente. On note γ sa limite.

(b) On voit en effet que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(par télescopage)} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

La suite (S_n) étant majorée par 1, minorée par 0 (c'est une somme de termes positifs) et convergente, sa limite vérifie aussi l'encadrement $0 \leq \gamma \leq 1$.

(c) On a

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et la suite (S_n) est bien croissante.

(5) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Observons que

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{ax + bk - ak}{k(x+k)}$$

Par principe d'identification, l'égalité voulue pour tout $x \in [0; 1]$ donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ bk - ak &=& 0 \end{array} \right. \iff a = b = 1.$$

Notons que ni a ni b ne dépend de k. On a bien, pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}.$$

Ceci permet de calculer u_k:

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k} - \int_0^1 \frac{1}{x+k} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1 \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(b) Il suit alors, par télescopage que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \end{aligned}$$

(6) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Commençons par voir que

$$T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or, (S_n) est convergente (de limite γ) et on sait que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0, \; n \to +\infty.$$

Par somme, (T_n) est convergente, de limite γ.

(b) Cet encadrement classique se montre de différentes façons. On propose ici d'utiliser une inégalité des accroissement finis.
Sur l'intervalle $[n; n+1]$, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1/x$ qui est maximale en n et minimale en $n+1$. On a donc

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1-n) \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}.$$

Il suit de cet encadrement que

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \le 0$$

et la suite (T_n) est bien décroissante.

(c) La suite (S_n) est croissante et converge vers γ; on a donc $S_n \le \gamma$. De même, (T_n) est décroissante et converge aussi vers γ ce qui donne $T_n \ge \gamma$, on peut alors écrire

$$S_n \le \gamma \le T_n.$$

(7) (a) D'après les encadrement précédents, on peut écrire

$$0 \le \gamma - S_n \le T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}.$$

Il suit que S_n fournit une valeur approchée de γ à 10^{-3} près dès que $T_n - S_n$ est inférieur à 10^{-3}.

(b) Comme mentionné juste ci-dessus, comme

$$T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n},$$

il suffit que $1/n$ soit inférieur à 10^{-3} pour que S_n fournisse une valeur approchée de γ à $A0^{-3}$ près. On complète donc le script `SciLab` dans ce sens en calculant le terme S_n tant que $1/n > 10^{-3}$. **Attention**, dans chaque tour de boucle il faut rajouter la valeur de u_n et non pas simplement $1/n$, sinon l'initialisation $s = 1 - \ln(2)$ qui correspond à u_1 n'est pas compatible avec le reste du programme.

```
n=1
s=1-log(2)
while 1/n > 10^(-3)
    n=n+1
    s=s+1/n-log(n+1)+log(n)
end
disp(s)
```

Problème

Partie 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x$.

*On remarque que ces intégrales font déjà l'objet d'une partie d'un problème sur le sujet **EDHEC 2008** où la récurrence était à démontrer et non admise...*

(1) (a) Pour tout couple d'entiers (p,q), la fonction $x\mapsto x^p(1-x)^q$ est polynomiale et donc continue sur le segment $[0;1]$ rendant licite la définition de l'intégrale $I(p,q)$.

(b) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & x^p \\ v(x) & = & (1-x)^q \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & \frac{1}{p+1}x^{p+1} \\ v'(x) & = & -q(1-x)^{q-1} \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v ci-dessus sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ rendant l'intégration par parties licites. Celle-ci permet d'écrire

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1}\right]_0^1+\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1), \end{aligned}$$

car la fonction $x\mapsto x^{p+1}(1-x)^q$ dans le crochet s'annule en 0 et en 1. On a bien la relation demandée qui permet, par une récurrence admise (et c'est dommage) la formule

$$I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0).$$

(2) (a) Sans difficulté pour le calcul de primitive

$$I(p+q,0)=\int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1=\frac{1}{p+q+1}.$$

Il suit immédiatement, d'après la relation admise précédemment que

$$I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)=\frac{p!q!}{(p+q)!}\times\frac{1}{p+q+1}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(b) Soit $p\in\mathbb{N}$. On a

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x=I(p,p)=\frac{p!p!}{(p+p+1)!}=\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Partie 2

Dans cette partie, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On considère la fonction b_n définie par $b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n(1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

(3) La fonction b_n satisfait toutes les conditions pour être considérée comme une densité de probabilité :

- Elle est positive ou nulle partout.
  En effet, elle est produit de deux quantités positives sur $[0;1]$ et nulle ailleurs.

- Elle est continue sur $\mathbb{R}$.
  Sur $[0;1]$ c'est une fonction polynomiale donc continue. Sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$, elle est constante nulle donc continue. De plus (ce n'est pas nécessaire pour que b_n soit une densité) mais $b_n(0) = b_n(1) = 0$ et la fonction est continue aux deux points de raccordement ce qui la rend continue sur $\mathbb{R}$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
  En effet, b_n étant nulle en dehors de $[0;1]$, la convergence de l'intégrale ci-dessus se ramène à celle sur $[0;1]$ qui existe car c'est celle d'une fonction continue. De plus, on reconnait les calculs de la Partie 1:

$$\int_0^1 b_n(x)\mathrm{d}x = \alpha_n \int_0^1 x^n(1-x)^n\mathrm{d}x = \alpha_n \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1.$$

(4) La variable X_0 a pour densité la fonction b_0. Observant que $\alpha_0 = 1$, on a $b_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ et on reconnait une densité de la loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$.

(5) (a) Par définition,

$$\begin{aligned} X_n \text{ admet une espérance} \quad &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\mathrm{d}x \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^1 \alpha_n x^{n+1}(1-x)^n\mathrm{d}x \text{ converge} \end{aligned}$$

Naturellement, la dernière intégrale ci-dessus existe (c'est encore l'intégrale sur $[0;1]$ d'une fonction polynomiale continue) et on reconnait même, au facteur α_n près, l'intégrale $I(n+1,n)$. Ainsi, X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \alpha_n I(n+1,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

ce qui est bien le résultat demandé.

(b) Pour la variance, l'existence de celle-ci est caractérisée par celle du moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} X_n \text{ admet une variance} \quad &\iff X_n^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\mathrm{d}x \text{ converge (absolument)} \\ &\iff \int_0^1 \alpha_n x^{n+2}(1-x)^n\mathrm{d}x \text{ converge} \end{aligned}$$

Cette intégrale existe à nouveau et on a

$$E(X_n^2) = \alpha_n I(n+2,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

Puis, par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 \\ &= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2n+4-(2n+3)}{4(2n+3)} \\ &= \frac{1}{4(2n+3)} \end{aligned}$$

(c) X_n admet une variance, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = P\left(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2}.$$

Comme

$$\frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et que $P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \geq 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Partie 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie la fonction f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \int_0^x \alpha_n t^n (1-t)^n \mathrm{d}t.$$

(6) Pour $n = 0$, on a déjà vu que $\alpha_0 = 1$ et on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = \int_0^x 1 \mathrm{d}t = x.$$

(7) (a) Pour $x = 1$, c'est l'intégrale déjà calculée dans la partie précédente; $f_n(1) = 1$.

(b) Le changement de variable $u = 1-t$ (qui donne $t = 1-u$) est affine; il est donc licite. La formule de changement de variable donne d'abord $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ et donc

$$f_n(x) = \int_0^x \alpha_n t^n (1-t)^n \mathrm{d}t = \int_1^{1-x} \alpha_n (1-u)^n u^n (-\mathrm{d}u) = \int_{1-x}^1 \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u.$$

Par Chasles, on obtient donc

$$\begin{aligned} f_n(x) + f_n(1-x) &= \int_{1-x}^1 \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u + \int_0^{1-x} \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \alpha_n u^n (1-u)^n \mathrm{d}u = f_n(1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(c) En appliquant la formule ci-dessus avec $x = 1/2$, on a

$$2f_n\left(\frac{1}{2}\right) = f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

ce qui permet donc d'obtenir

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(8) (a) La fonction $t \mapsto \alpha_n t^n(1-t)^n$ est polynomiale et donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par un théorème du cours (aussi connu sous le nom de *théorème fondamental de l'analyse*), la fonction f_n est **LA** primitive de $t \mapsto \alpha_n t^n(1-t)^n$ qui s'annule en 0. Il suit que f_n est dérivable (elle est même de classe $\mathcal{C}^1$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \alpha_n x^n(1-x)^n.$$

(b) La quantité α_n étant strictement positive, le signe de $f_n'(x)$ ne dépend que de celui de $x^n(1-x)^n$. On différencie donc selon la parité de n.

- Si n est pair, les quantité x^n et $(1-x)^n$ sont toujours positives et on a alors

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	

- Si n est impair, les quantité x^n et $(1-x)^n$ changent de signe.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(9) (a) D'après la formule du binôme, on peut écrire

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k t^k$$

de sorte que

$$\alpha_n t^n(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{n+k}.$$

On peut donc "primitiver" sans difficulté pour obtenir

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^n \binom{n}{k}(-1)^k}{n+k+1} x^{n+k+1}$$

ce qui est bien une fonction polynomiale.
En $\pm\infty$, f_n est équivalente à son terme de plus haut degré:

$$f_n(x) \sim \frac{\alpha_n}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1}, \quad x \to \pm\infty.$$

- Si n est pair, $(-1)^n = 1$ et $2n+1$ est impair donc

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

- Si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $2n+1$ est impair donc

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$$

(b) On a toutes les informations pour dresser le tableau de variations de f_n:

- Si n est pair :

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) f_n étant polynomiale, elle est naturellement de classe (au moins) $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = (f_n')'(x) = \alpha_n \left(nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}\right) = n\alpha_n x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x).$$

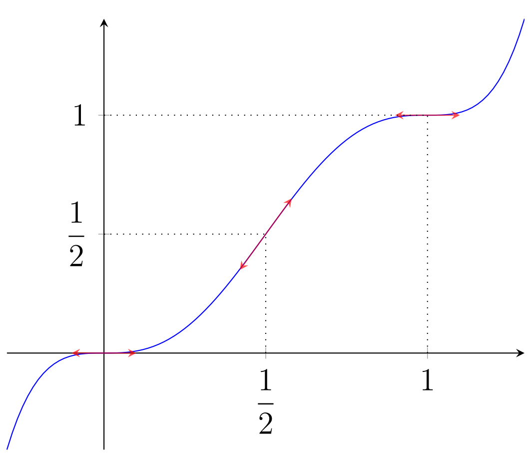
(b) On sait que f_n possède un point d'inflexion d'abscisse x si $f_n''(x)$ s'annule en x **en changeant de signe**.

- Si n est impair, $n-1$ est pair et $f_n''(x)$ ne s'annule en changeant de signe qu'en $x = 1/2$ et f_n admet donc un seul point d'inflexion;

- Si n est pair en revanche, $n-1$ est pair et $f_n''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 0$, $x = 1/2$ et $x = 1$ ce qui donne dans ce cas trois points d'inflexion.

(c) On trace l'allure de la courbe dans les deux cas (selon la parité de n)

Si n est pair (ici $n = 2$):



Si n est impair (ici $n = 3$):