

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 est A .

1. Les colonnes de A sont liées : $C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0$ donc A n'est pas inversible.

Comme A est non inversible alors 0 est valeur propre de A .

2. a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) On a une relation polynomiale : $A^4 = 0$.

Donc si α est valeur propre de A alors $\alpha^4 = 0$ et donc $\alpha = 0$.

0 est donc la seule valeur propre possible de A .

Conclusion : 0 est la seule valeur propre de A donc de f .

- c) Soit $u = (x, y, z, t)$ a pour coordonnées (x, y, z, t) dans la base canonique de \mathbb{R}^4 donc

$$u \in \ker(f) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$.

$((1, 1, 1, 1))$ est libre (un seul vecteur non nul) et génératrice de $\ker(f)$.

C'est donc une base de $\ker(f)$.

Conclusion : $\dim(\ker f) = 1$

- d) Comme la somme des dimension des sous espaces propres n'est pas 4

Conclusion : f n'est pas diagonalisable.

3. On note $\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

- a) Il suffit de montrer que cette famille de 4 vecteurs de \mathbb{R}^4 est libre :

On calcule les coordonnées de ε_2 par $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_2) = A \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_1)$ qui est la première colonne de A . Donc $\varepsilon_2 = (1, 1, 0, 0)$.

$\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2) = f^2(e_1)$ a donc pour coordonnées $A^2 \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_1)$ première colonne de A^2 . Donc $\varepsilon_3 = (1, 1, 1, 0)$

Et de même $\varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1)$

Si $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 + \delta\varepsilon_4 = 0$ alors $(\alpha + \beta + \gamma + \delta, \beta + \gamma + \delta, \gamma + \delta, \delta) = 0$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ (la famille était échelonnée)

Donc \mathcal{C} est libre de 4 vecteurs.

Conclusion : \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^4

b) La définition des ε nous donne :

$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, ses coordonnées dans \mathcal{C} sont $(0, 1, 0, 0)$ et de même pour $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$, $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_4$.

Enfin, $f(\varepsilon_4) = f^4(e_1)$ et comme $A^4 = 0$ alors les $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(\varepsilon_4)) = A^4 \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_1) = 0$.

Donc $f(\varepsilon_4) = 0$ et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On réutilise $f^4 = 0$, Par l'absurde :

Si $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$ alors $g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} = g \circ f^2 \circ g^{-1} = f^4 = 0$

et donc $f^2 = g^{-1} \circ 0 \circ g = 0$ ce qui est faux car $\text{mat}_{\mathcal{B}} f^2 = A^2 \neq 0$

Conclusion : il n'existe pas de tel endomorphisme

N.B. On pouvait aussi raisonner directement sur les matrices associées.

Si g existe, soit P la matrice associée dans la base canonique.

On a alors P inversible et $PAP^{-1} = A^2$ d'où $A^4 = PA^2P^{-1}$

Exercice 2

1. a) f est continue en x tel que $e^x - 1 \neq 0$.

$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ car \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} et que x et 0 en sont éléments. Donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0 : $\frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$ car $e^x - 1 \sim x$ donc f est continue en 0 .

Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

b) f est de classe C^1 en tout x tel que $e^x - 1 \neq 0$ donc sur $]0; +\infty[$. (quotient de fonctions C^1)

et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

c) On a donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) - 1}{\left(x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)^2} \\ &= \frac{1 - x + x - x^2 + x^2/2 + x^2\varepsilon_2(x) - 1}{x^2(1 + \varepsilon_3(x))} = \frac{-x^2/2 + x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(1 + \varepsilon_3(x))^2} \\ &= \frac{-1/2 + \varepsilon_2(x)}{(1 + \varepsilon_3(x))^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ et que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1/2$ alors le taux de décroissement a la même limite. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$

De plus $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$ donc f' est continue en 0. Finalement que f est C^1 sur $]0; +\infty[$.

2. a) f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^2 et $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1-x-1)e^x(e^x-1)^2 - 2[(1-x)e^x-1](e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} \\ &= \frac{(e^x-1)[-xe^x(e^x-1) - 2[(1-x)e^x-1]e^x]}{(e^x-1)^4} \\ &= \frac{-xe^{2x} + xe^x - 2[e^{2x} - xe^{2x} - e^x]}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2) \end{aligned}$$

b) g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = xe^x + e^x - 2e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$

g' est dérivable sur \mathbb{R} et $g''(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ d'où les variations et les signes :

x	0	+	$+\infty$
$g''(x)$	0	+	
$g'(x)$	0	↗	+
$g(x)$	0	↗	+

et pour f :

x	0	+	$+\infty$
$g(x)$	0	+	
$e^x - 1$	0	↗	+
$f''(x)$	0	+	
$f'(x)$	-1/2	↗	- 0
$f(x)$	1	↘	0

en $+\infty$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{xe^x \left[\left(-1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{xe^x} \right]}{e^{2x} (1 - 1/e^x)^2} = \frac{x \left[\left(-1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{xe^x} \right]}{e^x (1 - 1/e^x)^2} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{car } x = o(e^x) \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in]0; +\infty[$, $f''(x) > 0$. (la courbe est convexe)

c) Comme f' est croissante et tend vers 0 en $+\infty$, elle est strictement négative et f est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+

En $+\infty$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x (1 - 1/e^x)} \rightarrow 0 \quad \text{car } x \ll e^x$$

d) D'où la courbe représentative : on place la tangente en 0, l'asymptote à l'infini et la concavité.

3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) D'après les variations f on a $\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq 1$

D'après les variations de f' , on a pour tout $x \in [0; +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ et comme $|f'(x)| = -\frac{1}{2}f'(x)$

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

b) On procède par équivalence pour résoudre l'équation : 0 n'est pas solution et pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\Leftrightarrow 1 = e^x - 1 \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } e^x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 = e^x \\ &\Leftrightarrow x = \ln(2) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $\ln(2)$ est l'unique solution de cette équation.

c) On applique alors l'inégalité des accroissements finis :

On montre tout d'abord que pour tout entier n , $u_n \in [0 + \infty[$

Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \in [0 + \infty[$

Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \in [0 + \infty[$ alors, comme $f \geq 0$ sur $[0 + \infty[$, $f(u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} \in [0 + \infty[$.

Donc pour tout entier n , $u_n \in [0 + \infty[$

De plus $\ln(2) \in [0 + \infty[$

Et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0 + \infty[$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| = |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

d) On a alors par récurrence, pour tout entier n , $0 \leq |u_n - \ln(2)| \leq 1/2^n$

Et par encadrement $u_n - \ln(2) \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow \ln(2)$

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

a) On a

$$t^2 f_n(t) = \frac{e^{-t}t^{n+2}}{n!} = \frac{1}{n!}t^{n+2}/e^t$$

Et comme $t^{n+2} = o(e^t)$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

On a donc $0 \leq f_n(t) = o(t^{-2})$

Et comme $\int_0^{+\infty} t^{-2} dt$ converge (intégrale de Riemann), par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ impropre en $+\infty$ converge également.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

b) Pour $x \geq 0$, On intègre par parties (sur $[0, x]$, f_n est donnée par la première formule)

$$u(t) = t^n : u'(t) = nt^{n-1} : v'(t) = e^{-t} : v(t) = -e^{-t}$$

Et comme u et v sont C^1

$$\int_0^x f_n(t) dt = \left[\frac{1}{n!} t^n e^{-t} \right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{n!} n t^{n-1} e^{-t} dt$$

et pour $n \geq 1$: $n! = n(n-1)!$ donc

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; +\infty[, \quad \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt$

c) On procède alors par récurrence :

– Pour $n = 0$: $\int_0^x f_0(t) dt = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$

Donc $\int_0^{+\infty} f_0(t) dt$ converge et vaut 1

– Soit $n \geq 0$ tel que $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$

alors $n + 1 \geq 1$ et $\int_0^x f_{n+1}(t) dt = -\frac{e^{-x}x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f_n(t) dt \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ car $x^{n+1}e^{-x} = x^{n+1}/e^x$ et $x^{n+1} = o(e^x)$

Donc $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t) dt$ converge et vaut 1

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut 1

d) f_n est continue sur \mathbb{R}^* et positive sur \mathbb{R}

$\int_{-\infty}^0 f_n = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = 1$

Conclusion : f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n , on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

a) On calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$:

$\int_{-\infty}^0 t f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 = 0$ et

$$\begin{aligned} \int_0^x t f_n(t) dt &= \int_0^x \frac{e^{-t}t^{n+1}}{n!} dt \text{ c'est presque } f_{n+1} \\ &= (n+1) \int_0^x \frac{e^{-t}t^{n+1}}{(n+1)!} dt \\ &\rightarrow (n+1) \int_0^{+\infty} f_{n+1}(t) dt \end{aligned}$$

Donc X_n a une espérance et $E(X_n) = n + 1$

Et de même pour $E(X_n^2)$ par le théorème de transfert

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 f_n(t) dt &= \int_0^x \frac{e^{-t}t^{n+2}}{n!} dt \\ &= (n+1)(n+2) \int_0^x \frac{e^{-t}t^{n+2}}{(n+2)!} dt \\ &\rightarrow (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

donc l'intégrale est convergente donc absolument convergente, donc X_n^2 a une espérance $E(X_n^2) = (n+1)(n+2)$

et X_n a une variance qui est :

$V(X_n) = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)(n+2-1) = n+1$

Conclusion : $E(X_n) = n+1$ et $V(X_n) = n+1$

b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes :

$$\int_0^4 f_4(t) dt \simeq 0,37 \quad \int_0^6 f_4(t) dt \simeq 0,71 \quad \int_0^8 f_4(t) dt \simeq 0,90$$

La fonction de répartition F_4 de X_4 est continue sur \mathbb{R} et dérivable là où f_4 est continue : sur \mathbb{R}^* et en 0^- : $f_4(x) = 0 \rightarrow 0 = f_4(0)$ quand $x \rightarrow 0^-$

Donc f_4 est continue et F_4 est dérivable sur \mathbb{R} .

Pour $x \in]-\infty, 0]$: $F_4(x) = \int_{-\infty}^x 0 = 0$

En 0^+ : $F_4'(0^+) = f_4(0) = 0$ donc on a une tangente horizontale e à l'origine.

En $+\infty$: $F_4 \rightarrow 1$ asymptote horizontale.

$F_4'(x) = f_4(x)$ et F_4

D'où la courbe représentative.

$P(X_4 > 4) = 1 - P(X_4 \leq 4) = \int_{-\infty}^4 f_4 = \int_0^4 f_4 \simeq 0,37$

Comme $4 \leq 8$: $P(4 < X_4 \leq 8) = F_4(8) - F_4(4) \simeq 0,90 - 0,37 \simeq 0,53$

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t .

On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t .

- a) Pour tout réel $t > 0$, $E(Y_t) = V(t) = t$

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n , prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ , égale à l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ième}}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.

- b) Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$(Z_n \leq t)$ signifie que la $n^{\text{ième}}$ voiture arrive au plus tard à t

Et comme le nombre de voiture va croissant avec le temps, cela signifie qu'à l'instant t , il y a eu au moins n voiture.

Conclusion : $(Z_n \leq t) = (Y_t \geq n)$

- c) La fonction de répartition de Z_n est donc donnée par :

$F(t) = P(Z_n \leq t) = P(Y_t \geq n) = 1 - P(Y_t < n)$

Avec $P(Y_t < n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y_t = k) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t} \frac{t^k}{k!}$

Conclusion : $F(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t} \frac{t^k}{k!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

- d) On vérifie les conditions pour être fonction de répartition de variable à densité :

F est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$

En 0^- : $F(t) \rightarrow 0 = F(0)$ donc F est continue sur \mathbb{R}

F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^*

Donc Z_n est à densité et a pour densité $F'(t)$

Pour $t > 0$: (la puissance 0, ne se dérive pas comme les autres)

Dérivée d'une somme

$$\begin{aligned}F'(t) &= e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} (k e^{-t} t^{k-1} - t^k e^{-t}) \\&= e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} e^{-t} t^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \\&= e^{-t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-t} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \\&= e^{-t} - \sum_{h=0}^{n-2} \frac{t^h e^{-t}}{h!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \\&= e^{-t} - \frac{t^0 e^{-t}}{0!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} \\&= f_{n-1}(t)\end{aligned}$$

et pour $t < 0$, $F'(t) = 0 = f_{n-1}(t)$

Conclusion : Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité