

EXERCICE 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Première partie

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

enfin $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$

2. Soient x et y réels.

On a $xA + yA^2 = y \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 3x & y + x & y + x \\ y + x & x & x \\ y + x & x & x \end{pmatrix}$

Donc si $xA + yA^2 = 0$ alors $x = 0$ et $x + y = 0$ donc $y = 0$ et la famille (A, A^2) est libre.

3. Comme la famille (A, A^2) est libre, si a_n et b_n existent, ils sont alors uniques.

L'existence se prouve par récurrence :

– Pour $n = 1$ on a $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent.

– Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe a_n et b_n réels avec $A^n = a_nA + b_nA^2$

alors $A^{n+1} = A^nA = (a_nA + b_nA^2)A = a_nA^2 + b_nA^3 = a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$

Donc $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ (réels) conviennent

– Donc pour tout entier n , il existe des uniques a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$ et on a $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$

4. Turbo-Pascal :

Si on affecte les valeurs a_{n+1} et a_n à une même variable **a**, on n'en dispose plus pour calculer la valeur b_{n+1}

Il faut donc avoir ici 2 variables **ap** et **as** pour affecter les valeurs précédentes et suivantes et de même pour **b**.

Il faudra calculer les suivants du 2ème au n ème (pour k de 2 à n)

```

program suites ;
var ap,as,bp,bs :real ;n,k :integer ;
begin
writeln('n?') ;readln(n) ;
ap :=1 ;bp :=0 ;
for k :=2 to n do
begin
    as :=2*bp ;bs :=ap+bp ;
    ap :=as ;bp :=bs ;
end ;
writeln(ap ;bp) ;
end ;

```

Le `begin...end` est indispensable car il y a plusieurs instructions à effectuer pour chaque valeur de `k`.

5. a) Comme $a_{n+1} = 2b_n$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $a_{n+2} = 2b_{n+1}$ pour tout entier n .

Comme $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n+2} = 2a_n + 2b_n$

et comme $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \geq 1$ on a finalement $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

- b) La suite a est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Son équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$ qui a pour racines $r = -1$ et $r = 2$

Donc pour tout $n \geq 1$ on a $a_n = x(-1)^n + y2^n$.

Comme $A = 1A + 0A^2$ et que $A^2 = 0A + 1A^2$ on a $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ donc x et y sont solutions de

$$\begin{cases} a_1 = x(-1)^1 + y2^1 \\ a_2 = x(-1)^2 + y2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = -x + 2y \\ 0 = x + 4y \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = -x + 2y \\ 1 = 6y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2/3 \\ y = 1/6 \end{cases}$$

donc pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$

et en reportant dans $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$ pour tout $n \geq 1$

- c) Finalement on trouve que $A^n = \left(-\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A + \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A^2$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

II. Seconde partie

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 est A .

1. $\text{Im}(f)$ est engendrée par $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

(car $\text{Im}(f) = \{f(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$)

avec $f(e_1) = (1, 1, 1)$ et $f(e_2) = f(e_3) = (1, 0, 0)$ (d'après les colonnes de la matrice A de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3)

Donc elle est engendrée par $(f(e_1), f(e_2))$ qui est de plus une famille libre (échelonnée) donc une base de $\text{Im}(f)$

Donc la dimension de $\text{Im}(f)$ est 2 (nombre de vecteurs dans une base).

2. a) Comme la matrice A de f est symétrique, A et donc f est diagonalisable.

b) Comme $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ alors (théorème du rang) $\dim(\ker(f)) = 1 \neq 0$ donc f n'est pas bijectif.

On peut aussi raisonner par l'absurde :

si f est bijective alors A est inversible. Et comme $A^3 = A^2 + 2A$ en multipliant par A^{-1} on a $A^2 = A + 2I$. Or $A + 2I = () \neq A^2$.

Donc f n'est pas bijective.

I

3. Comme $A^3 = A^2 + 2A$ alors, si α est valeur propre **alors** $\alpha^3 = \alpha^2 + 2\alpha$ et donc $\alpha = 0, -1$ ou 2
Les seules valeurs propres **possibles** de f sont $0, -1$, et 2

On les test :

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc 0 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est $\text{Vect}((0, -1, 1))$

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 2y \\ z = y \end{cases}$$

Donc 2 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est $\text{Vect}((2, 1, 1))$

$$(A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ y = z \\ x = -z \end{cases}$$

Donc -1 est valeur propre de f et le sous espace propre associé est $\text{Vect}((-1, 1, 1))$

On peut aussi de façon plus élémentaire déterminer les solutions u de $f(u) = \alpha u$ suivant les valeurs de α :

Soit $u = (x, y, z)$

$$f(u) = \alpha u \iff (A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (1 - \alpha)x + y + z = 0 \\ x - \alpha y = 0 \\ x - \alpha z = 0 \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} (1 - \alpha)\alpha y + y + z = 0 \\ x = \alpha y \\ \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases}$$

$$- \text{ Si } \alpha \neq 0 \text{ alors } (1) \iff \begin{cases} ((1 - \alpha)\alpha + 2)y = 0 \\ x = \alpha y \\ z = y \end{cases} \iff (2) \begin{cases} (-\alpha^2 + \alpha + 2)y = 0 \\ x = \alpha y \\ z = y \end{cases}$$

$-\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ a pour solutions $\alpha = -1$ et 2

- Si de plus $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq -1$ alors $y = z = x = 0$ et α n'est pas valeur propre.

- Si $\alpha = 2$ ($\neq 0$) alors $(2) \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = y \end{cases}$ et $S_2 = \{(2y, y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 1))$ donc 2 est valeur propre et $((2, 1, 1))$ qui est une famille libre (un vecteur seul et non nul) est une base du sous espace propre associé.

- Si $\alpha = -1$ alors $(2) \iff \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}$ et $S_{-1} = \{(-y, y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 1))$ donc -1 est valeur propre et $((-1, 1, 1))$ est une base du sous espace propre associé.

$$- \text{ Si } \alpha = 0 \text{ alors } (1) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc $S_0 = \{(0, -z, z) / y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, -1, 1))$ donc 0 est valeur propre et $((0, -1, 1))$ est une base du sous espace propre associé.

Donc les valeurs propres de f sont 0, -1 et 2.

4. Les valeurs propres dans l'ordre croissant sont -1 , 0 et 2

Donc en concaténant les coordonnées des vecteurs propres des bases, on a avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice P est inversible et $A = PDP^{-1}$ (théorème de diagonalisation)

NB pour avoir la troisième composante égale à 1 au lieu de x , (si elle n'y était pas déjà) il suffirait de multiplier le vecteur propre par $1/x$ ce qui donnerait un autre vecteur propre associé

Pour calculer P^{-1} , on applique la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -L1 \\ L2 + L1 \\ L3 + L1 \end{array} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ -L2 \\ L3 + L2 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L1 + L3/3 \\ L2 + L3/2 \\ L3/6 \end{array} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L1 + L3/3 \\ L2 + L3/2 \\ L3/6 \end{array}$$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Pour résoudre $(E) : AM + MA = 0$ on fait apparaître la forme diagonalisée de A et on multiplie à gauche par P^{-1} et à droite par P

$$AM + MA = 0 \iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0 \iff DP^{-1}MP + P^{-1}MPD$$

Soit $N = P^{-1}MP$

On a $(E) \iff DN + ND = 0$

On en cherche les coefficients : $N = \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix}$

$$(E) \iff \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -2x & -a & u \\ -y & 0 & 2v \\ z & 2c & 4w \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff a = c = x = y = z = u = v = w = 0$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

reste à résoudre $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$

Donc les solutions sont , pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$M = PNP^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{b}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{b}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

On note $e = \exp(1)$, et $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

On considère, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_a(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} - \frac{y}{a}$$

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes entre elles.

I. Première partie

Dans cette première partie, on prend $a = -e$, et on note g à la place de f_{-e} . Ainsi, l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad g(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a $y \neq 0$.

Donc la fonction $(x, y) \rightarrow \frac{1}{y}$ est de classe C^2 .

Donc g est de classe C^2 comme produit et somme de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

(On peut détailler les fonctions coordonnées $(x, y) \rightarrow y$ composée avec la fonction inverse)

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{y} (e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{(1-x)e^{-x}}{y} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

3. On résout alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{(1-x)e^{-x}}{y} = 0 \\ -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ -\frac{e^{-1}}{y^2} + \frac{1}{e} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ le seul couple (x, y) (avec $y > 0$) en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, est $(1, 1)$.

4. Comme $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert, si g a un extremum, les dérivées partielles d'ordre 1 s'y annulent. Donc le seul extremum possible est $(1, 1)$

Pour savoir si c'est effectivement un extremum local, on calcule d'abord les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-e^{-x} - (1-x)e^{-x}}{y} = \frac{(-2+x)e^{-x}}{y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= -\frac{(1-x)e^{-x}}{y^2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= 2\frac{xe^{-x}}{y^3} \end{aligned}$$

et leurs valeurs en $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1) = \frac{-1}{e} \\ s &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1, 1) = 0 \\ t &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, 1) = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

et le déterminant $rt - s^2 = -2/e^2 < 0$ prouve que g n'a pas d'extremum local et donc pas d'extremum global.

II. Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend $a = 1$.

On considère, pour tout entier n tel que $n \geq 1$, l'application $h_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n(x) = f_1(x, x^n) = \frac{x e^{-x}}{x^n} - x^n$$

et l'application $\varphi_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. Soit n supérieur ou égal à 1 et $x \in]0; +\infty[$. (l'important étant que $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} h_n(x) = 0 &\iff \frac{x e^{-x}}{x^n} - x^n = 0 \iff \frac{x e^{-x}}{x^n} = x^n \\ &\iff x e^{-x} = x^{2n} \iff e^{-x} = x^{2n-1} \\ &\iff \varphi_n(x) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n(x) = 0 \iff \varphi_n(x) = 0$$

2. On étudie les solutions sur $]0, 1[$ de $\varphi_n(x) = 0$ par le théorème de bijection :

φ_n est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi_n'(x) = -e^{-x} - (2n-1)x^{2n-2} < 0$ (pour la formule de dérivée de la puissance, on vérifie que $2n-1 \neq 0$)

Donc φ_n est strictement décroissante et continue donc bijective de $]0, 1[$ dans $] \lim_1 \varphi_n, \lim_0 \varphi_n [=] \frac{1-e}{e}, 1 [$

Comme $0 \in] \frac{1-e}{e}, 1 [$, l'équation $\varphi_n(x) = 0$ a donc une unique solution u_n sur $]0, 1[$.

Comme φ_n est strictement décroissante, elle n'en a pas d'autres sur $]0, +\infty[$

Donc d'après l'équivalence $\varphi_n(x) = 0 \iff h_n(x) = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $h_n(x) = 0$, admet une solution et une seule, notée u_n , et que $0 < u_n < 1$

3. On a $\varphi_n(u_n) = 0$ donc $e^{-u_n} - u_n^{2n-1} = 0$ et $e^{-u_n} = u_n^{2n-1}$ et comme $u_n > 0$ on a alors $\ln(e^{-u_n}) = (2n-1) \ln(u_n)$ d'où finalement $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$.

4. Comme $0 < u_n < 1$ et que $2n-1 > 0$, on a l'encadrement $0 < -\frac{u_n}{2n-1} < \frac{1}{2n-1}$

et par encadrement $-\frac{u_n}{2n-1} = \ln(u_n) \rightarrow 0$.

D'où finalement $u_n = e^{\ln(u_n)} \rightarrow e^0 = 1$ (par continuité de exp)

EXERCICE 3

1. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x}}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ n'est impropre qu'en $+\infty$

$$\begin{aligned} \int_2^M \frac{1}{x\sqrt{x}} dx &= \int_2^M x^{-3/2} dx = [-2x^{-1/2}]_2^M \\ &= -2M^{-1/2} + 2^{1/2} \\ &\rightarrow \sqrt{2} \end{aligned}$$

quand M tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale est convergente et vaut $\sqrt{2}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1. f est positive ou nulle.

Elle est continue (par morceaux) sauf en 0 et on étudie la convergence de son intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 f &= \int_{-\infty}^2 0 = 0 \\ \int_2^M f &= \int_2^M \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^M \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

- a) La fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Elle vaut donc :

$$\begin{aligned} - \text{ si } x \leq 2 : F(x) &= \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 \\ - \text{ si } x \geq 2 : F(x) &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^x \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx = \left[\frac{2}{\sqrt{2}} x^{-1/2} \right]_2^x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- b) X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge.

Or pour $x \geq 2 : xf(x) = \frac{x}{x\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale (de Riemann) diverge.

Donc X n'a pas d'espérance.

On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3 , chacune de même loi que X .

3. On considère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (U > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)$$

- a) G est définie par $G(x) = p(U \leq x) = 1 - p(U > x)$

Et comme T_1, T_2 , et T_3 sont indépendantes,

$$\begin{aligned} p(U > t) &= p(T_1 > t) \cdot p(T_2 > t) \cdot p(T_3 > t) \\ &= (1 - F(t))^3 \end{aligned}$$

et finalement : $G(t) = 1 - (1 - F(t))^3$

b) U admet une densité si sa fonction de répartition est

– continue

Comme F est continue sur \mathbb{R} , G l'est aussi comme composée de fonctions continues.

– de classe C^1 sauf en un nombre fini point

ici, G est de classe C^1 là où F l'est, c'est à dire sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (là où f est continue)

De plus Sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a $G'(x) = -(1 - F(t))^2 (-F'(t)) = 3(1 - F(t))^2 f(t)$

Finalement U a pour densité g défini par $g(x) = G'(x)$

$$\text{Donc } \begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ g(x) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x\sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

c) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx$ impropre en $\pm\infty$

– En $-\infty$ elle converge.

– En $+\infty$:

$$\begin{aligned} \int_2^M xg(x) dx &= \int_2^M x \frac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}} dx = 3\sqrt{2} \int_2^M \frac{1}{x^{3/2}} dx \\ &= 3\sqrt{2} \left[-2 \frac{1}{x^{1/2}} \right]_2^M = -6\sqrt{2} \frac{1}{M^{1/2}} + 6\sqrt{2} \frac{1}{2^{1/2}} \\ &\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 6 \end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx$ converge et U admet une espérance $E(U) = 6$

4. On considère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (V \leq t) = (T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 \leq t)$$

a) La fonction de répartition H de V est définie par $H(x) = p.(V \leq x)$

Et comme T_1, T_2 , et T_3 sont indépendantes,

$$\begin{aligned} H(x) &= p(T_1 \leq x) \cdot p(T_2 \leq x) \cdot p(T_3 \leq x) \\ &= F(x)^3 \end{aligned}$$

b) On vérifie les critères :

– H est continue sur \mathbb{R}

– est de classe C^1 sauf en 2

une densité h de V est donnée par $h(x) = H'(x) = 3F^2(x) f(x)$ (valeur que l'on étend pour $x = 2$)

c) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x) dx$ impropre en $\pm\infty$

– En $-\infty$ elle converge (fonction nulle)

– en $+\infty$:

$$\int_2^M xh(x) dx = \int_2^M 3x \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_2^M \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

Et comme $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x^{1/2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$ dont l'intégrale diverge en $+\infty$, par comparaison d'intégrales à termes positifs, l'intégrale de $xh(x)$ diverge également et V n'a pas d'espérance.