corrigé eml 2014 par gabriel baudrand

exercice 1 $\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}},\ x > 0$

Partie I 1°) φ est de classe C^3 comme somme et produit de fonctions de classe C^3, et, pour $x > 0$:

$\varphi'(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{\frac{1}{x}}$

$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^x + e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) = e^x - \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$

$\varphi'''(x) = e^x - (-\frac{3}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = e^x + \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$

2°) Pour tout $x > 0$, $\varphi'''(x) > 0$, donc φ'' est strictement croissante. $\varphi''(1) = 0$, donc

x	0 1 $+\infty$
φ''	$-$ 0 $+$
φ'	↘ e ↗

Donc $\forall x > 0, \varphi'(x) \geq e$.

3°) Avec $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, $xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^y}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$, donc $\lim_{0^+} \varphi = -\infty$.

4°)

$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$; $\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}\, x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

5°) Pour tout $x \geq 3, \varphi'(x) \geq e$, donc d'après la formule des accroissements finis,

$\forall x \in [3\,;\,+\infty[\,, \varphi(x) - \varphi(3) \geq e(x-3)$; $\varphi(x) \geq ex - 3e + \varphi(3) \geq ex - 3e + 15 \geq ex$.

6°) D'après 2°), la dérivée seconde φ'' de φ s'annule en changeant de signe uniquement pour $x = 1$, donc C admet une un unique point d'inflexion, le point de coordonnées (1 ; 0), car $\varphi(1) = 0$.

$\varphi'(1) = e$, la tangente au point d'abscisse 1 a donc pour équation $y - 0 = e(x-1)$.

7°)

x	0 1 $+\infty$
φ'	$+$
φ	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

En $+\infty$, branche parabolique de direction $(0y)$ (d'après 4°)).

En 0, asymptote d'équation $x = 0$ (d'après 3°)).

Partie II $U = \mathbf{R} \times]0\,;\,+\infty[$; $f(x,y) = xy - e^x \ln y$ pour $(x,y) \in U$

8°) Vous hachurez ce qu'il y a au dessus de l'axe des abscisses (et U est la partie hachurée…).

9°) f est de classe C^2 sur U comme somme et produit de fonctions de classe C^2, et

$f'_x(x,y) = y - e^x \ln y$

$f'_y(x,y) = x - \frac{e^x}{y}$

$f''_{x^2}(x,y) = -e^x \ln y$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 1 - \frac{e^x}{y}$

$f''_{y^2}(x,y) = \frac{e^x}{y^2}$

10°) (x,y) est point critique de f ssi

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - e^x \ln y = 0 \\ x - \frac{e^x}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x \ln y \\ \frac{e^x}{y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^x}{x} = e^x \ln y \\ y = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \ln y \\ y = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} = y \\ e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^x}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} = y \\ x\, e^{\frac{1}{x}} - e^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) = 0 \end{cases} \text{ car } x = \frac{e^x}{y} > 0$$

11°) D'après 7°), $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. L'unique point critique de f est donc $\left(1, \frac{e^1}{1}\right) = (1, e)$.

12°) En $(1, e)$, $r = -e^1 \ln e = -e$; $s = 1 - \frac{e^1}{e} = 0$; $t = \frac{e^1}{e^2} = \frac{1}{e}$; $rt - s^2 = -1 < 0$. Donc $f(1, e)$ n'est pas un extremum local de f.

13°) U *est un ouvert*, donc si f admet un extremum sur U, cet extremum est atteint en un point critique. f n'admet pas d'extremum en son seul point critique, donc f n'admet pas d'extremum local sur U.

Partie III $u_0 = 3, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14°) On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 3\ e^n$, et on en profite pour faire un peu de métaphysique :

La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 3$ existe et $u_0 \geq 3\ e^0$.

Supposons la propriété vraie pour n fixé dans **N** : u_n existe et $u_n \geq 3\ e^n$. Alors $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe et d'après 5°), $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq e\, u_n \geq e\, 3\ e^n = 3\ e^{n+1}$.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

15°) $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ et φ est croissante, donc (u_n) est monotone. $u_0 = 3$ et $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) > 15$ d'après 5°), donc $u_0 < u_1$, donc (u_n) est croissante (strictement). (On peut aussi démontrer : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$ par récurrence.)

Pour tout $n, u_n > 3\ e^n$ et $\lim_{n \to +\infty} 3\ e^n = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

16°)

```
programm eml ;
var u :real ;n :integer ;
BEGIN
u:=3;n:=0;
repeat u:=exp(u)-u*exp(1/u); n:=n+1 until u>1000;
writeln(n);
END.
```

17°) Pour tout n, $u_n \geq 3\ e^n$, donc

$$0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3e^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

La série de terme général $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]0; 1[$, donc convergente. Il en résulte d'après les critères de convergence des séries à termes positifs que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente.

exercice 2 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$

1°) $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons des matrices A,B,C, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, donc un espace vectoriel, de famille génratrice (A,B,C). Or cette famille est libre, car $aA+bB+cC=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$. $A,B,C)$ *est donc ne base de* $\mathcal{E}$, qui est donc de mimension 3.

2°) Avec $M=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}a'&b'\\0&c'\end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{E}$, $MN=\begin{pmatrix}aa'&ab'+bc'\\0&cc'\end{pmatrix}\in\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

3°) $M=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si a et c sont tous deux non nuls, car M est triangulaire. L'algorithme du pivot donne alors

$\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$ $L_1\leftarrow cL_1-bL_2$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}ca&0\\0&c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}c&-b\\0&1\end{pmatrix}$ donc $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&-\frac{b}{a}\\0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}\in\mathcal{E}$

4°) Pour tout $M,N\in\mathcal{E}$ et tout $x\in\mathbf{R}$,
$f(M+N)=T(M+N)T=TMT+TNT=f(M)+f(N)$
$f(xM)=T(xM)T=x(TMT)=xf(M)$
$f(M)=TMT\in\mathcal{E}$ car $T\in\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

5°) T est triangulaire sans zéros sur la diagonale, donc inversible. Mais on ne peut pas en déduire comme ça que f est une bijection, la matrice de f n'est pas T !
Soit $N\in\mathcal{E}$. $f(M)=N\Leftrightarrow TMT=N\Leftrightarrow M=T^{-1}NT^{-1}$ car T est inversible. Tout élémnet M de $\mathcal{E}$ admet un unique antécédent par f, donc f est une bijection, donc un automorphisme de $\mathcal{E}$ (et l'automorphisme réciproque est : $f^{-1}: N\mapsto T^{-1}NT^{-1}$).

6°) $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ est triangulaire, son unique valeur propre est 1. si T était diagonalisable, on aurait $T=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=I$. Or $T\neq I$, donc T n'est pas diagonalisable.

7°) $f(A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=A+B$

$f(B)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=B$

$f(C)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=B+C$

Donc $F=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

8°)
$\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&1-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}L_1\leftrightarrow L_2\begin{pmatrix}1&1-\lambda&1\\1-\lambda&0&0\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}L_2\leftarrow L_2-(1-\lambda)L_1$

$\begin{pmatrix}1&1-\lambda&1\\0&-(1-\lambda)^2&-1+\lambda\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$

La seule valeur propre de F est donc 1. Le sous espace propre associé a pour équation $x+z=0$, mais attention, avec x,y,z coordonnées de M dans la base (A,B,C), soit $M=xA+yB+zC=\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}$.

$x+z=0\Leftrightarrow x=-z\Leftrightarrow M=-zA+yB+zC=\ z(-A+C)+yB.$

Donc $\mathcal{E}=\text{Vect}(-A+C,B)$; $-A+C$ et B sont non colinéaires, donc $(-A+C,B)$ est une base du sous espace propre de f associé à la valeur propre 1, qui est donc de dimension 2.

9°) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à 2, alors que $\mathcal{E}$ est de dimension 3 : f n'est pas diagonalisable. (On peut aussi utiliser le même argument qu'à la question 6°) : si f était diagonalisable avec 1 pour seule valeur propre, on aurait $F = PIP^{-1} = I$ (avec ce coup ci des matrices 3-3). Or $F \neq I$, donc…)

10°) f admet 1 pour seule valeur propre, donc, avec $\lambda \neq 1$, l'équation $f(M) = \lambda M$ admet l'unique solution $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11°) Avec $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices I et aH commutent (car $I(aH) = aH = (AH)I$), on peut donc appliquer la formule du binôme :

$$(I + aH)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}(aH)^k = \binom{n}{0} I^n (aH)^0 + \binom{n}{1} I^{n-1}(aH)^1$$

car $(aH)^k = a^k H^k = 0$ pour $k \geq 2$. Donc $(I + aH)^n = I + naH$.

12°) $F = I + H$, donc d'après la question précédente, avec $a = 1$: $F^n = I + nH$.

13°) On va chercher G sous la forme $G = I + aH$:

$$(I + aH)^3 = F \Leftrightarrow I + 3aH = F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

La matrice $G = I + \frac{1}{3}H$ convient donc.

Oui, il existe (au moins) un endomorphisme g tel que $g \circ g \circ g = f$: celui dont la matrice dans la base (A, B, C) est G…

Visiblement le concepteur du sujet est plus inspiré par l'analyse que par l'algèbre linéaire…

exercice 3

Partie I

1°) $n = 3$.

a) $(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$ (et peu importe alors le résultat du tirage suivant…). Par indépendance des tirages, on obtient alors

$$\mathrm{P}(X_3 = 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

b) $(X_3 = 2) = (N_1 = 1) \cup \big((N_1 = 2) \cap (N_2 \geq 2)\big) \cup \big((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)\big)$. Par incompatibilité, puis indépendance, on obtient :

$$\mathrm{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$X_3(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4\}$, donc

$$\mathrm{P}(X_3 = 3) = 1 - \mathrm{P}(X_3 = 4) - \mathrm{P}(X_3 = 2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{27 - 18 - 1}{27} = \frac{8}{27}$$

2°)

$$\mathrm{E}(X_3) = 4 \times \frac{1}{27} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} = \frac{4 + 36 + 24}{27} = \frac{64}{27}$$

Partie II Cas général

3°) Pour tout $k \in [\![2 ; n+1]\!]$par équiprobalité, N_k sui la loi uniforme sur $[\![1 ; n]\!]$, et

$$\mathrm{E}(N_k) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad \mathrm{V}(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

4°) $(X_n = n + 1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n - 1) \cap \ldots \cap (N_n = 1)$, donc par indépendance :

$$\mathrm{P}(X_n = n + 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

5°) Sachant $(N_1 = i)$, l'événement $(X_n = 2)$ est réalisé si et seulement si on obtient au deuxième tirage un numéro supérieur ou égal à i.
Il y a n numéros en tout, $i-1$ sont inférieurs à i, donc $n-(i-1) = n-i+1$ sont supérieurs ou égaux à i, il y a donc $n-i+1$ cas favorables et n possibles, donc

$$\mathrm{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$$

6°) Formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N_1 = k)_{1\leq i\leq n}$:

$$\mathrm{P}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(N_1 = i)\mathrm{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{n-i+1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) \underset{k=n-i+1}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

** **7°)** $(X_n > k)$ est réalisé si et seulement si au cours des k premiers tirages (plus exactement, au cours des tirages n°2, …, k) on n'a jamais obtenu un numéro ou égal au numéro précédent, ssi on a obtenu au cours des k premiers tirages un numéro inférieur au précédent, donc

$$(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$$

Expérience : on tire au hasard, une à une et avec remise, k boules d'une urne contenant n boules (pour l'événement $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$ considéré, les tirages ultérieurs n'ont pas d'importance).
Un résultat de cette expérience est une suite $(n_1, n_2, \ldots , n_k)$ à k éléments d'un ensemble à n éléments (l'ensemble $\{1; 2; \ldots ; n\}$).
Il y a n^k telles suites.
Parmi ces suites, combien y a-t-il de suites strictement décroissantes, qui réalisent l'événement $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$? Réponse : il y en a $\binom{n}{k}$. En effet, il y a autant de suites strictement décroissantes à k éléments d'un ensemble à n éléments que de parties à k à éléments d'un ensemble à n éléments. Explication : étant donnée une partie à k éléments d'u n ensemble à n éléments, il y a une et une seule manière d'écrire ses éléments en ordre (strictement) décroissant…
On obtient donc, en divisant le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles :

$$\mathrm{P}(X_n > k) = \mathrm{P}(N_1 > N_2 > \cdots > N_k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

On retient donc :
*Le nombre de suites strictement décroissantes à k éléménts d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k}$.
Idem pour le nombre de suites strictement croissantes, bien sûr.
Et tant qu'à faire, on rappelle :
* Le nombre de suites à k éléments d'un ensemble à n éléments est n^k.
* Le nombre de suites à k éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.
* Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k}$.
* le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Et pour finir on déplore la présence de telles questions de dénombrement, qui ne suivent pas la tendance actuelle des programmes, et des épreuves proposées…
Pour $k = 0$, $\mathrm{P}(X_n > 0) = 1$, et $\frac{1}{n^0}\binom{n}{0} = 1$. Pour $k = 1$, $\mathrm{P}(X_n > 1) = 1$ et $\frac{1}{n^1}\binom{n}{1} = \frac{1}{n}n = 1$. L'égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8°) $(X_n > k) \cup (X_n = k) = (X_n > k-1)$, donc par incompatibilité
$\mathrm{P}(X_n > k) + \mathrm{P}(X_n = k) = \mathrm{P}(X_n > k-1)$, $\mathrm{P}(X_n = k) = \mathrm{P}(X_n > k-1) - \mathrm{P}(X_n > k)$

** **9°)**

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k\mathrm{P}(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k\big(\mathrm{P}(X_n > k-1) - \mathrm{P}(X_n > k)\big)$$
$$= \sum_{k=2}^{n+1} k\mathrm{P}(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathrm{P}(X_n > k)$$

changement d'indice $i = k - 1$ dans la première somme, $i = k$ dans la deuxième :

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} (i+1)\mathrm{P}(X_n > i) - \sum_{i=2}^{n+1} i\mathrm{P}(X_n > i)$$

On regroupe les deux sommes à chaque fois que c'est possible, en mettant en facteur $\mathrm{P}(X_n > i$, pour tous les termes allant de $i = 2$ à n, et on n'omet pas d'écrire les termes isolés :

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{i=2}^{n} (i+1-i)\mathrm{P}(X_n > i) + 2\mathrm{P}(X_n > 1) - (n+1)\mathrm{P}(X_n > n+1)$$

$P(X_n > 1) = 1$ et $\mathrm{P}(X_n > n+1) = 0$, donc

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}(X_n > i) + 2 = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(X_n > i)$$

car $\mathrm{P}(X_n > 0) = \mathrm{P}(X_n > 1) = 1$! Ce n'est pas fini :

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

d'après la formule du binôme. Raccord avec le résultat de la première partie $\mathrm{E}(X_3) = \frac{64}{27}$!

****10°)**

$$\mathrm{P}(X_n = k) = \mathrm{P}(X_n > k-1) - \mathrm{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{n^k}\left[n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}\right]$$
$$= \frac{1}{n^k}\left[\frac{n\,n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right] = \frac{1}{n^k}\,\frac{n\,n!\,k - n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{1}{n^k}\,\frac{n!\,(nk-n+k-1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{1}{n^k}\,\frac{n!\,(n(k-1)+k-1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{1}{n^k}\,\frac{n!\,(n+1)(k-1)}{k!\,(n-k+1)!}$$
$$= \frac{1}{n^k}\,\frac{(n+1)!\,(k-1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k}\,\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$$

Partie III

11°) $\mathrm{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} = \dfrac{k-1}{n^k}\,\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

$$= \frac{k-1}{n^k}\,\frac{(n+1)\dots(n+2-k)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k-1}{n^k}\frac{n^k}{k!} = \frac{k-1}{n^k}$$

12°) Sous réserve de convergence des séries rencontrées :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1$$

car la série de terme général $\frac{1}{k!}, k \geq 0$, est convergente (série exponentielle).

13°) $\mathrm{E}(Z) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathrm{P}(Z = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$

$\mathrm{E}(X_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$; $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{1}{n} = 1$, donc $\mathrm{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.