MATHÉMATIQUES I, session 2016

Option Économique

École conceptrice : EMLYON

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

L'exercice 1 (algèbre), composé de deux parties, propose l'étude d'une matrice carrée d'ordre 3 puis l'étude d'un endomorphisme construit à partir de celle-ci.

Partie I

La partie I, très élémentaire, propose l'étude et la diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 3 numérique.

1. Question extrêmement facile, résolue dans la quasi-totalité des copies.

2. Question facile, correctement résolue dans la plupart des copies. Les correcteurs ont quand même rencontré des raisonnements faux ou des définitions fausses pour la liberté d'une famille de plusieurs vecteurs.

3.a. Question très souvent correctement résolue, la matrice étant symétrique.

3.b. La résolution de l'équation $\lambda^2 = 2$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$, a été une barrière infranchissable pour une partie non négligeable des candidat(e)s.

4. Question extrêmement facile, résolue correctement dans la quasi-totalité des copies, mais quelquefois au prix de lourds calculs inutiles.

Partie II

La partie II propose l'étude d'un espace vectoriel construit à partir de la matrice de la partie I et l'étude d'un endomorphisme de cet espace vectoriel.

5. On trouve des confusions, entre $\mathscr{E}$ et $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, entre $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$. La rédaction est ici souvent confuse et de nombreux candidat(e)s ont perdu du temps dans des calculs inutiles.

6. Quelques bluffs (bien sûr sanctionnés) et trop de calculs inutiles en passant par les coefficients des matrices. Il y a souvent encore confusion entre $\mathscr{E}$ et $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Cette question a été, dans l'ensemble, plutôt mal traitée.

7. La linéarité de f est facile, en passant par une écriture globale des matrices, et les candidat(e)s ont souvent perdu du temps en passant encore par les coefficients des matrices.

8. Question correctement résolue dans la moitié des copies. Des résultats fantaisistes témoignent d'une incompréhension du lien entre application linéaire et matrice, via des bases.

9.a. Quelques calculs inutilement lourds, par calcul de F^3. De nombreux candidat(e)s croient, à tort, que A est la matrice de f (dans une certaine base) et confondent A et F.

9.b. On peut ici appliquer directement un résultat du cours, convenablement cité.

9.c. Les ravages dûs à une résolution fausse de la question 3.b. se propagent ici. Trop de candidat(e)s confondent A et F. Les sous-espaces propres de f doivent être exprimés à l'aide de matrices carrées d'ordre 2 et non à l'aide de matrices colonnes à 4 éléments : l'énoncé demande les sous-espaces propres de f et non ceux de F.

10. Question facile, si l'on a correctement résolu la question précédente.

11. Il y a trop souvent confusion entre A et F. Les réponses doivent être exprimées comme bases de $\mathrm{Im}\,(f)$ et de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et non comme familles de vecteurs colonnes.

12.a., b. Ces deux questions, volontairement posées de façon ouverte, ont été très discriminantes. Il y a, dans trop de copies, utilisation incorrecte de A^{-1} (qui n'existe pas), ou simplification multiplicative incorrecte par A, en invoquant $A \neq 0$, c'est-à-dire en confondant l'inversibilité et la non-nullité pour une matrice carrée.

L'exercice 2 (analyse), composé de trois parties, propose l'étude d'une fonction réelle d'une variable réelle, puis l'étude d'une fonction réelle de deux variables réelles liée à la précédente et enfin l'étude d'une suite récurrente.

Partie I

La partie I propose l'étude d'une fonction réelle d'une variable réelle et celle de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une équation.

1. Il faut ici clairement séparer l'étude de la continuité sur $]0\,;+\infty[$ (par opérations) et l'étude de la continuité en 0 (nécessitant une prépondérance classique). Les correcteurs ont trouvé une confusion entre $\ln t \underset{t \,\longrightarrow\, 0}{=} o(t)$ (faux) et $\ln t \underset{t \,\longrightarrow\, 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t}\right)$ (correct).

2. Quelques résultats faux pour $f'(t)$ et $f''(t)$, et la suite de la résolution de cet exercice est alors absente ou grossièrement fausse.

3. Le signe de $f'(t)$ ne peut pas être affirmé au bluff.

4.a. Question rarement résolue. Les candidat(e)s n'ont pas vu qu'il s'agissait d'une tangente (ou demi-tangente) parallèle à l'axe des ordonnées. Il y a quelquefois confusion entre horizontal et vertical.

4.b. Pour un point d'inflexion, il ne suffit pas que f'' s'annule : le changement de signe de f'' est souvent oublié. Un point d'inflexion n'est pas nécessairement à tangente horizontale.

4.c. Trop de tracés absents ou incohérents avec les résultats précédents.

5. Bien citer toute l'argumentation nécessaire.

Partie II

La partie II Propose la recherche des extremums locaux d'une fonction réelle de deux variables réelles.

6. Question extrêmement facile, résolue correctement dans la plupart des copies.

7.a La rigueur dans la manipulation des équivalences logiques n'est en général pas respectée, mais une moitié des candidat(e)s obtient quand même le résultat voulu. La condition $x > 1$ est maltraitée.

7.b. On constate souvent ici une confusion entre équivalence logique et implication.

8. Question en général correctement résolue. La détermination des valeurs propres de la matrice hessienne (qui est ici diagonale) est quelquefois maladroite. Rappelons que l'utilisation de $rt-s^2$ n'est plus au programme. Il s'agit ici d'un point col ou point selle, et non d'un point colle ou point sel.

Partie III

La partie III étudie une suite récurrente définie à l'aide de la fonction donnée dans la partie I.

9. On attend ici un raisonnement rigoureux par récurrence, utilisant la croissance de f et les valeurs de f en $\dfrac{1}{2}$ et 1. Les solutions des candidat(e)s sont souvent confuses ou incomplètes.

10. Ici aussi, on attend un raisonnement rigoureux par récurrence. La croissance de la fonction f n'entraîne pas la croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les solutions des candidat(e)s sont souvent confuses ou incomplètes.

11. L'existence de la limite est en général correctement obtenue (suite réelle croissante et majorée). La valeur 1 de la limite est moins souvent correctement établie, car affirmée sans preuve. L'intervention de la continuité n'est pas toujours perçue. Il y a quelquefois confusion entre les équations $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell) = 1$.

12. Les candidat(e)s ont trop délaissé cette question d'informatique. Le test d'arrêt de la boucle est quelquefois donné à l'envers. Il y a des oublis d'initialisation ou d'incrémentation dans la boucle. L'affichage final porte quelquefois sur u au lieu de N.

L'exercice 3 (probabilités) propose l'étude de variables aléatoires à densité.

Partie I

La partie I propose l'étude d'une première variable aléatoire à densité.

1. Beaucoup trop de bluffs (évidemment sanctionnés). Il est étonnant qu'une question aussi simple, ne nécessitant que deux ou trois lignes de calcul élémentaire (il y a d'ailleurs plusieurs méthodes) n'ait pas été correctement résolue.

2. La recherche d'une primitive pour la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$ a présenté des difficultés insurmontables pour la majorité des candidat(e)s.

3. La résolution correcte de cette question est liée au calcul de primitive de la question précédente.

4.a., b. Questions en général correctement résolues, mais les solutions sont souvent mal rédigées.

Partie II

La partie II étudie une autre variable aléatoire, déduite de la précédente par composition.

5. La réponse est $I =]0\,;+\infty[$ et non $I = [0\,;+\infty[$.

6. Question facile, souvent correctement résolue. Mais les correcteurs ont aussi rencontré de grossières erreurs de calcul sur le logarithme et l'exponentielle, et une confusion entre fonction réciproque et fonction inverse.

7. Question facile, souvent résolue.

8. La résolution de cette question dépend du résultat obtenu à la question 3.

9. Beaucoup d'affirmations sans preuve.

Partie III

La partie III étudie une convergence en loi pour une suite de variables aléatoires liées aux précédentes.

10.a. Question facile, assez souvent résolue. On attend ici une explication claire à chaque étape du calcul. Quelques écritures aberrantes (intersection de probabilités).

10.b. Question facile si la précédente a été résolue.

11. Quelques erreurs pour la détermination de la limite. Mais il y a aussi un nombre non négligeable de copies dans lesquelles cette limite est bien obtenue. Il y a ensuite oubli fréquent de montrer qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition.

L'équipe de conception s'est attachée à rédiger un sujet conforme au programme ECE, progressif dans la difficulté des questions, permettant aux candidat(e)s de valoriser leurs compétences : compréhension de la problématique, connaissance du cours, aptitude au raisonnement logique, mise en oeuvre des techniques de calcul, communication écrite et qualités de synthèse.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un excellent sujet, exempt d'erreur d'énoncé, intéressant, équilibré, progressif, complet, varié et couvrant une très large partie des connaissances exigibles des deux années de préparation, bien gradué en difficulté, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, très bien rédigé, bien adapté à la voie économique, et un peu long, ce dont il a été tenu compte dans l'établissement du barème.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi, grâce à quelques questions ouvertes, la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser, et il a été valorisant pour les candidat(e)s sérieux.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans les questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager.

Les correcteurs ont unanimement insisté sur la très grande hétérogénéité des copies : il y a de bonnes copies, de mauvaises copies et une proportion moins importante qu'autrefois de copies moyennes. L'écart entre les très bonnes copies et les autres s'est encore creusé.

L'aptitude au calcul, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

Les trois exercices sont abordés dans la quasi-totalité des copies.

Trop de candidat(e)s essaient d'appliquer des recettes, sans raisonnement et sans se rendre compte de contradictions dans leur texte. Les notions mathématiques sont souvent confondues et il y a trop d'erreurs de calcul.

Dans l'ensemble, la présentation a paru convenable, malgré quelques copies très peu soignées ou illisibles. Mais la rédaction est souvent trop approximative et les candidat(e)s manquent de rigueur dans les notations, les phrases mathématiques et l'argumentation.

Il est impératif que les questions soient numérotées selon l'énoncé et clairement séparées. Les résultats et les réponses doivent être mis en évidence en les encadrant proprement (à la règle).

L'éventail complet des notes a été utilisé et le sujet a joué parfaitement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

Moyenne de l'épreuve : 12,87 / 20 .