

## Mathématiques appliquées

### Conception emlyon BS

Session 2026

## I Présentation générale

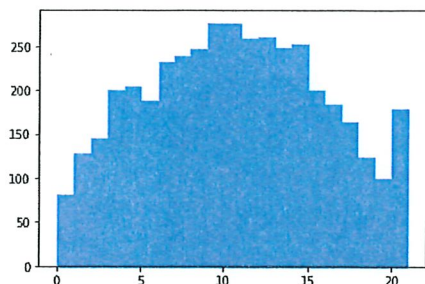
Dans la lignée des années précédentes, le sujet était composé de trois exercices correspondant aux trois thèmes au programme : analyse, algèbre et probabilités. On y abordait un grand nombre de notions, et les questions étaient de difficulté variée, permettant à tous les candidats de s'exprimer quel que soit leur niveau.

L'évaluation des candidats prenait en compte : la connaissance et la compréhension du cours, la maîtrise technique, la capacité à représenter graphiquement une courbe ou un domaine, la maîtrise de la programmation en langage Python, la capacité à raisonner, la qualité de la rédaction et de la présentation. Précisons certains critères d'évaluation :

- présentation : lisibilité, propreté, résultats encadrés ou surlignés ou soulignés, marquage des questions
- rédaction : clarté des raisonnements, rigueur, qualité de la langue

Des points de présentation et de rédaction étaient attribués à la toute fin de l'évaluation de la copie, le total de ces points comptait comme environ deux questions de difficulté moyenne.

Voici l'histogramme de la répartition des notes ainsi que quelques données statistiques :



- Nombre de copies : 4192
- Moyenne : 10,55
- Écart-type : 5,2
- Quartiles : 6,5 – 10,5 – 14,6

Les points se répartissent de la manière suivante :

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| Exercice 1                | 27% |
| Exercice 2                | 27% |
| Exercice 3                | 42% |
| Présentation et rédaction | 4%  |

## II Commentaires par exercices

### Exercice 1

Le premier exercice commençait (partie A) par la recherche et l'étude du point critique de la fonction de deux variables

$$f: (x, y) \mapsto x + \ln(1 + xy) \quad \text{définie sur } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 + xy > 0\}.$$

On s'intéressait ensuite à la ligne de niveau zéro de  $f$  (partie B). Il apparaissait que cette ligne de niveau zéro consistait en la réunion de la droite d'équation  $x = 0$  avec la courbe de la fonction  $g: x \mapsto \frac{e^{-x}-1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On procédait alors à l'étude de la fonction  $g$  (prolongement continu et dérivabilité en 0, étude des variations, représentation graphique). Dans la partie C on considérait une fonction définie par une intégrale correspondant à l'aire d'un certain domaine délimité par la ligne de niveau zéro.

- (Q1) On relève des *erreurs de notation* : beaucoup de candidats ne savent pas écrire  $\partial$ , d'autres omettent l'exposant dans  $\partial^2$ , certains n'utilisent pas les notations introduites dans les programmes officiels, des candidats balancent les dérivées partielles alors que le gradient est un vecteur.  
Les questions a) et b) ont été bien réussies. Peu de candidats ont répondu complètement à la question c), soit parce qu'ils n'ont pas réussi à déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne, soit parce qu'ils ne connaissaient pas la notion de point selle.
- (Q2) a) Question très bien réussie même si on peut lire  $e^{x+\ln(1+xy)} = e^x + e^{\ln(1+xy)}$ .  
b) Peu de candidats donnent la liste des valeurs de  $k$ . Le programme à trou est bien réussi dans l'ensemble.
- (Q3) L'étude du signe d'un quotient n'est pas maîtrisée.
- (Q4–5) Les questions sur la régularité d'une fonction ne sont pas bien maîtrisées. La plupart des candidats savent écrire la limite à calculer, mais pensent trop rarement à utiliser un développement limité.
- (Q6) La question b) demandait un peu d'initiative, peu de candidats ont abouti au résultat.
- (Q7) Un nombre extrêmement faible de candidats ont réussi à représenter les deux courbes. On trouve régulièrement que la courbe d'équation  $1 + xy = 0$  est une droite. La question b) n'a quasiment pas été traitée.
- (Q8) On note un manque de précision dans la rédaction. On voit souvent écrit que la dérivée de  $G(x) = H(x) - H(0)$  (où  $H$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbf{R}$ ) est  $G'(x) = H'(x) - H'(0)$ .
- (Q9) Question très bien réussie.
- (Q10) Un nombre non négligeable de candidats ont établi la convergence de l'intégrale  $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$  et répondu de manière rigoureuse à la question.
- (Q11) Question difficile et très peu abordée.

## Exercice 2

Tout l'exercice reposait sur l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  défini par :

$$\varphi(M) = \operatorname{tr}(M)I - M.$$

La partie A ne présentait aucune surprise et aboutissait à l'étude du spectre de la matrice représentative de  $\varphi$ . En utilisant les propriétés de  $\varphi$  on obtenait en partie B deux formules d'inversion : la formule de la comatrice pour les matrices carrées d'ordre 2 inversibles

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M),$$

ainsi qu'une formule pour l'inverse d'une somme de matrices ( $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  avec  $M, N, M + N$  inversibles) :

$$(M + N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M + N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M + N)} N^{-1}.$$

On montrait dans la partie C que, pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe un polynôme  $Q_n$  tel que :

$$\text{pour tout } M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ avec } \det(M) = 1, \quad \operatorname{tr}(M^n) = Q_n(\operatorname{tr}(M)).$$

Autrement dit, la trace de la puissance  $n$ -ième d'une matrice est un polynôme en la trace dans le cas des matrices  $M$  d'ordre 2 de déterminant 1. La démonstration mélangeait des raisonnements classiques sur les puissances de matrices avec des points plus délicats faisant appel aux polynômes de Tchebychev. On renvoie le lecteur intéressé à l'article *Traces in 2-generator subgroups of  $SL(2, \mathbf{C})$*  de Troels Jorgensen paru en 1982 dans les *Proceedings of the AMS*.

- (Q1) On note des confusions : des étudiants veulent montrer la linéarité de  $\varphi$  en utilisant le critère établissant qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel.
- (Q3) a) Un nombre important de candidats trouve une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  au lieu d'une matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ .  
c) Certains candidats affirment qu'une famille génératrice est une base sans vérifier qu'elle est libre. Un certain nombre d'étudiants se contentent de donner l'expression des sous-espaces propres sans en expliciter une base malgré l'intitulé de la question.
- (Q4) Des candidats perdent bêtement des points en ne détaillant pas le calcul.

- (Q5) a) Question où le raisonnement est évalué et qui est globalement très mal abordée. Même le sens facile ( $\Leftrightarrow$ ) est généralement présenté de manière floue sous forme d'une équivalence (avec plus ou moins l'hypothèse  $\det(M)$  non nul).
- b) Question plutôt réussie.
- (Q6) b) La plupart des candidats appliquent une récurrence simple qui ne permet pas d'établir rigoureusement la propriété. La règle sur le degré d'une somme de polynômes n'est globalement pas connue des candidats.
- (Q7) b) Il fallait clairement justifier la relation entre  $a_{n+1}$ ,  $a_n$  et  $a_{n-1}$ .
- c) L'expression de  $Q_n$  n'a été que rarement donnée.
- (Q8) a) Question plutôt réussie.
- b) Question peu traitée

### Exercice 3

Cet exercice portait uniquement sur les probabilités discrètes, on considérait une succession de lancers indépendants avec une même pièce.

Dans la partie A on déterminait l'espérance  $E(T)$  de la variable aléatoire  $T$  égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier double pile. L'approche choisie permettait d'éviter le calcul de la loi de  $T$  en décomposant  $T$  en une somme infinie de variables aléatoires  $N_i$  plus simples à étudier. En partie B on simulait en Python les variables aléatoires introduites en partie A.

Dans la partie C on considérait la variable aléatoire  $S_n$  égale au nombre de doubles piles obtenus lors des  $n$  premiers lancers. Là encore on pouvait écrire  $S_n$  sous la forme d'une somme de variables aléatoires, qui dans le cas présent suivaient la même loi de Bernoulli mais n'étaient pas indépendantes. Ceci permettait le calcul de l'espérance et de la variance de  $S_n$ . L'exercice s'achevait sur un résultat de type « loi des grands nombres » au moyen de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- (Q1) a) La justification de la loi géométrique est rarement satisfaisante, il manque trop souvent des mots clés.
- b) La plupart des candidats n'ont pas su déterminer la loi de  $N$  connaissant la loi de  $N-1$ , on voit souvent l'erreur : si  $P(N-1 = k) = f(k)$  alors  $P(N = k) = f(k+1)$ .
- (Q2) b) Peu de candidats pensent à utiliser la question précédente pour traiter celle-ci.
- (Q3) a) Seuls quelques candidats ont su reconnaître la loi géométrique.
- b) Peu de candidats pensent à fournir l'espérance de  $R-1$ .
- (Q4) Peu de réponses correctes aux questions a) et b), les candidats sont plus à l'aise dans les calculs d'espérance que dans la compréhension d'une expérience aléatoire. On attend de voir écrit « convergence absolue », et la condition  $|q| < 1$  pour justifier la convergence d'une série géométrique est trop souvent oubliée. Il est dommage que certains candidats se débrouillent pour obtenir au final le résultat énoncé dans la question via un tour de passe-passe faisant suite à une ou plusieurs erreurs de calculs
- (Q5) Question réussie.
- (Q6) Les questions a) et b) n'ont été que très rarement réussies. Beaucoup de candidats appliquent un argument de comparaison de séries à termes positifs qui n'est pas correct puisqu'on n'a pas établi d'inégalité entre les termes généraux des deux séries, il convenait plutôt de montrer que la série à termes positifs  $\sum kP(T = k)$  est majorée.
- (Q7) Question peu traitée et généralement mal traitée.
- (Q8) Des erreurs dans l'utilisation de `np.random()`, et des oublis de parenthèses après le `np.random`.
- (Q9) Beaucoup de candidats ne savent pas appeler la première composante d'un couple.
- (Q10) Question peu abordée.
- (Q11) Quelques candidats affirment le résultat sans aucune justification.
- (Q12) a) On attendait une démonstration mathématiques du fait que  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  ne sont pas indépendantes, il ne suffit pas de faire une phrase. Il est trop souvent écrit  $P(Y_n \cap Y_{n+1})$  montrant une confusion manifeste entre variable aléatoire et événement.
- b) Très peu de candidats abordent le calcul de la covariance de  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$ .
- (Q13) a) Question quasiment pas abordée.
- b) Quelques tentatives intéressantes, mais très peu de candidats possèdent un sens des inégalités.
- (Q14) On attend des candidats qu'ils vérifient les hypothèses d'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.