Chapitre 7

ESSEC MATHS 2. Sujet

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E_n = \{1, 2, ..., n\} = [\![1, n]\!]$ et Ω l'ensemble des permutations sur E_n. Pour tout ensemble fini A, on note $\mathrm{Card}\,(A)$ son cardinal, c'est à dire son nombre d'éléments.
On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k, le nombre $\begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
On rappelle enfin la formule de Poincaré, sous sa forme ensembliste : soit A un ensemble de cardinal fini, et A_1, A_2,...,A_n, des sous-ensembles de A. Alors

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Partie I

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{Card}\,(\Omega)$. Pour tout $i \in E_n$ on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega\,(i) = i\}$.
2. Montrer que pour tout $k \in E_n$ et pour tout $i_1, i_2, ..., i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n$

$$\mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = (n-k)\,!$$

   En déduire, pour tout $k \in E_n$, la valeur de

$$s_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

3. On note

$$D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in E_n,\ \omega\,(i) \neq i\}$$

   a) Montrer que

$$d = \mathrm{Card}\,(D_{n,0}) = n! - \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n!\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

Pour tout $k \in E_n$, on appelle $D_{n,k}$ l'ensemble formé des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe $i_1, i_2, ..., i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n$ et tel que pour tout $j \in \{1, ..., k\}$, on a $\omega(i_j) = i_j$, et pour tout $\ell \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, on a $\omega(\ell) \neq \ell$.

b) Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$d_k = \text{Card}(D_{n,k}) = \binom{n}{k} \text{Card}(d_{n-k,0})$$

c) Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$d_k = s_k - \binom{k+1}{k} s_{k+1} + \binom{k+2}{k} s_{k+2} + ... + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s_n$$

4. On pose $d_0 = s_0 = 0$.

   a) Ecrire la matrice du système d'équations qui donne $(d_0, d_1, ..., d_n)$ en fonction de $(s_0, s_1, ..., s_n)$.

   b) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, donner l'expression de l'endomorphisme représenté, dans la base canonique, par cette matrice.

   c) En déduire que cet endomorphisme est inversible en exprimant son inverse.

   d) En déduire la relation qui lie $(s_0, s_1, ..., s_n)$ à $(d_0, d_1, ..., d_n)$.

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente au prix unitaire de b euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n,
- à l'intérieur du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B euros.

On suppose que les numéros cachés sont tous différents, compris entre 1 et n et choisis « au hasard » .

Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le coût d'une telle campagne.

Afin de formaliser la notion de choix au hasard, et pour toute la suite du problème, on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme discrète P définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. a) En utilisant les résultats de la question I.3, déterminer la loi de X_n.

   b) Etablir les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1$$

   (on justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes)

2. Pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Justifier l'égalité

$$X_n = 1_{A_1} + 1_{A_2} + ... + 1_{A_n}$$

   et en déduire l'espérance de la variable aléatoire X_n.

3. a) Montrer que

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} 1_{A_i \cap A_j}$$

   b) En déduire la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n

4. a) Montrer que le coût aléatoire de l'opération pour l'entreprise est donné par

$$C_n = nb - BX_n$$

   En déduire le coût moyen $E(C_n)$, ainsi que le risque donné par l'écart type $\sigma(C_n)$.

   b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général ?

5. Montrer que le gain d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par

$$G_n = BY_n - b$$

   où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{n}$. En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Montrer que la suite des variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
2. Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k\,!} \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i\,!} \right|$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \leqslant \frac{1}{m\,!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leqslant \frac{2}{m\,!}$$

   (on remarquera que pour tout $k \geqslant 1$, $m(m+1)...(m+k-1) \geqslant m^k$)

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k+1)!} \leqslant \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

5. On considère les instructions Pascal suivantes :

```
eps := 0.00001 ;
x := 2 ;
k := 2 ;
While x > eps/2 do
begin
x := x*(2/k) ;
k := k+1 ;
end ;
writeln(k)
```

a) On entre dans la boucle `While` avec $x = 2$. On suppose qu'on est passé $j \geqslant 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de `x` à l'entrée de la boucle la fois suivante ?

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)\,!}$ est décroissante, et admet une limite que l'on calculera.

c) En déduire que la boucle `While` ci-dessus se termine.

d) La valeur affichée par la dernière ligne est 14[1]. Que représente-t-elle ?

Partie IV.

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis ℓ, $(\ell \geqslant 1)$, exemplaires du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $L = \{j_1, j_2, ..., j_\ell\}$.
On note Y_n^ℓ la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi ces ℓ exemplaires achetés.

1. On rappelle que pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier l'égalité

$$Y_n^\ell = 1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + ... + 1_{A_{j_\ell}}$$

En déduire l'espérance $E\left(Y_n^\ell\right)$ de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

2. a) Montrer que

$$\left(Y_n^\ell\right)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}} + \sum_{1\leqslant i\neq k\leqslant \ell} 1_{A_{j_i}\cap A_{j_k}}$$

b) En déduire la variance $V\left(Y_n^\ell\right)$ de la variable aléatoire Y_n^ℓ

3. a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^\ell - b\,\ell$

b) Déterminer son gain moyen, ainsi que l'écart type de ce gain.

[1] La valeur initialement écrite sur le sujet était 11, ce qui est faux. L'auteur de ces lignes s'est permis de modifier le sujet.

c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?

***