Corrigé ESSEC II 2012 Eco par Pierre Veuillez

En psychologie, on s'intéresse à la façon dont un individu est amené à sélectionner une action quand un choix se présente entre différentes actions possibles. Ce choix peut être influencé par un grand nombre de facteurs impondérables, ce qui fait qu'il est légitime de le modéliser à l'aide de variables aléatoires. L'objet du problème est de présenter quelques éléments simples de la théorie des modèles de choix discret. Dans le modèle binaire le plus simple, le choix se fait en fonction de la réaction à un stimulus. Dans une première partie, on étudie la modélisation élémentaire de la réponse à un stimulus. Dans une deuxième partie, on considère une importante modélisation de choix dépendant du hasard, dit modèle de Luce, et on étudie ses propriétés. Enfin dans une troisième partie, on regarde le cas où les différents choix possibles engendrent du réactions aléatoires et on étudie des propriétés de la réaction optimale. Les trois parties sont indépendantes

I Modèles avec réponse discrète

Soit α un réel (positif ou négatif) représentant un niveau de stimulus. On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}$ représentant la tolérance de l'individu au stimulus en question. On considère donc que l'individu réagit si $X \leq \alpha$ ne réagit pas si $X > \alpha$. On considère la variable aléatoire Y indicatrice de la réaction définie par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq a \\ 0 & \text{si } X > \alpha \end{cases}$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

1. On a $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathrm{P}(X \leq \alpha))$ donc son espérance est $\theta = \mathrm{P}(X \leq \alpha)$ et sa variance $V(Y) = \theta(1-\theta)$
2. On considère n individus dont on observe la réaction au stimulus. La tolérance de l'individu i est une variable aléatoire X_i dont on suppose qu'elle suit la même loi que X. En outre, les tolérances pour les différents individus sont supposées indépendantes
   a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'individus réagissant au stimulus.
   N est le nombre d'individus réagissant au stimulus, indépendamment l'un de l'autre et parmi n individus.
   Conclusion : $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\theta) \text{ donc } E(N) = n\theta \text{ et } V(N) = n\theta(1-\theta)}$
   b) Puisque $E(N) = n\theta$ alors $E\left(\frac{N}{n}\right) = \theta$
   Conclusion : $\boxed{\frac{N}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$
3. Soient m un réel strictement positif.
   On suppose que la tolérance X est obtenue comme résultante d'un « grand nombre »n de facteurs indépendants de petites taille c'est à dire que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont supposés être des variables aléatoires de même loi d'espérance $\dfrac{m}{n}$ et de variance $\dfrac{\sigma^2}{n}$

a) On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i)\\
&= n\frac{m}{n}\\
&= m \text{ et}\\
V(X) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \text{ indépendantes}\\
&= \sum_{i=1}^{n} V(X_i)\\
&= n\frac{\sigma^2}{n}\\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

donc l'écart type de X est σ.

b) X étant une somme de variables indépendantes et de même loi ayant une variance non nulle, alors la somme centrée-réduite converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$

Or la somme centrée-réduite est :$X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

Donc la fonction de répartition de X^* tend vers Φ, fonction de réparation de $\mathcal{N}(0,1)$ (là où elle est continue : sur $\mathbb{R}$) et pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq a\right) \to \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

c) Le résultat précédent justifie que pour n grand on peut considérer que la variable aléatoire $\dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On a

$$\begin{aligned}
\theta &= \mathrm{P}(X \leq \alpha)\\
&= \mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{\alpha - m}{\sigma}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

d) Quand $\sigma \to +\infty$, $\dfrac{\alpha-m}{\sigma} \to 0$ donc (continuité) $\Phi\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right) \to \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

Quand l'écart type est grand, les valeurs de X sont dispersées et elles ont autant de chances d'être au dessus que en dessous du seuil.

4. Plutôt que d'utiliser ici normale, on préfère souvent une loi plus simple dont on étudie dans cette question quelques propriétés.

a) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{F}(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$$

F est continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ $(1+e^{-y}\neq 0)$.
$\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$
enfin,

$$F'(y) = \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} > 0$$

donc F est croissante.
Conclusion : $\boxed{F \text{ est donc la fonction de répartition d'une variable ... à densité (loi logistique)}}$

b) On suppose que X suit une loi logistique. On a $\theta = \mathrm{P}(X \leq \alpha) = F(\alpha) = \dfrac{1}{1+e^{-\alpha}}$

On suppose que Z suit aussi une loi logistique.

c) On a dit que Z était alors à densité et une densité de Z est définie par :

$$f(y) = F'(y) = \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$

d) Soit y un réel positif.

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{1+e^{-y}} \\ &= \frac{1}{e^{-y}(1+e^{y})} \\ &= e^{y}F(-y) \end{aligned}$$

e) **Astuce à chercher ... pas trop longtemps !**
Z admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\,dy$ converge.
Et on essaye de réutiliser la relation précédente ... on la dérive

$$\begin{aligned} f(y) &= F'(y) \\ &= e^{y}F(-y) - e^{y}F'(-y) \\ &= e^{y}F(-y) - e^{y}f(-y) \end{aligned}$$

je coince ....
ou on essaie une intégration par parties.
On intègre par parties avec $u(u) = y$: $u'(y) = 1$ et f primitivée en F, les fonctions u et F étant C^1

$$\begin{aligned} \int_0^M y\left[e^{y}F(-y) - e^{y}f(-y)\right]dy &= \int_0^M ye^{y}F(-y)\,dy - \int_0^M ye^{y}f(-y)\,dy \\ &= \int_0^M y\frac{e^{y}}{(1+e^{y})}dy - \int_0^M ye^{y}f(-y)\,dy \\ &= \left[yF(y)\right]_0^M - \int_0^M F(y)\,dy \end{aligned}$$

et la déterminer

f) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ et soit $T = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$

Comme $U \in]0,1[$ alors $\dfrac{U}{1-U} > 0$ et T est définie.
Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(T \leq x) &= \left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq x\right) \\
&= \left(\frac{U}{1-U} \leq e^x\right) \text{ et } 1-U>0 \\
&= \left(U \leq e^x\left(1-U\right)\right) \\
&= \left(U\left(1+e^x\right) \leq e^x\right) \\
&= \left(U \leq \frac{e^x}{1+e^x}\right) \\
&= \left(U \leq \frac{1}{1+e^{-x}}\right)
\end{aligned}$$

et comme $\dfrac{1}{1+e^{-x}} \in]0,1[$ intervalle sur lequel la fonction de répartition de U vaut : $F_U(x) = x$

$$\mathrm{P}(T \leq x) = \mathrm{P}\left(U \leq \frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

pour tout x réel.

Conclusion : $\boxed{\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right) \text{ suit une loi logistique}}$

II Règles de décisions stochastiques : le modèle de Luce

On suppose maintenant que l'individu doit choisir une action dans un ensemble fini d'actions possibles A.
On note $\mathcal{F} = \{S \subset A \ / \ |S| \geq 2\}$ où $|S|$ désigne le cardinal de l'ensemble S. Quand le nombre d'actions possibles est très grand, la procédure de choix se passe en deux temps : l'individu commence par sélectionner une partie S de $\mathcal{F}$ à laquelle il va restreindre son choix. puis choisit une action précise à l'intérieur de S.
Pour chaque élément S de $\mathcal{F}$, on définit une probabilité P_S sur S : pour a un élément de S, $P_S(\{a\})$ représente la probabilité pour que l'individu ayant sélectionné S choisisse l'action a. Pour simplifier la notation on notera $P_S(a) = P_S(\{a\})$,
Pour a et b distincts dans A, on note $P(a,b) = P_{\{a,b\}}(\{a\})$; il s'agit donc de la probabilité de préférer l'action a à l'action b dans la cas du choix entre a et b.
On suppose que pour tout S appartenant à $\mathcal{F}$ et tout a dans $\mathcal{S}$, $P_{\mathcal{S}}(a) \neq 0$
(*) On fait l'hypothèse sur le modèle : Pour tout couple (S,T) d'éléments de $\mathcal{F}$ tel que S est inclus dans T, pour tout a élément de S,

$$P_T(a) = P_T(S)\, P_S(a)$$

5) Comme $S \subset T$ alors $S = T \cap S$ donc $P_S(a) = P_{T\cap S}(a)$
Et comme $\{a\} \subset S$ alors $S \cap \{a\} = \{a\}$ donc

$$\begin{aligned}
P_T(S)\, P_S(a) &= P_T(S)\, P_{T\cap S}(a) \\
&= P_T(S \cap a) = P_T(a)
\end{aligned}$$

formule des probabilités composées.

6) a) Soit k un réel strictement positif. On pose pour tout $a \in A$, $v(a) = kP_A(a)$

Pour tout S de $\mathcal{F}$ et tout a de S,

$$\begin{aligned}
\frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)} &= \frac{kP_A(a)}{\sum_{b\in S} kP_A(b)} \qquad ((1))\\
&= \frac{P_A(a)}{P_A\left(\bigcup_{b\in S} b\right)}\\
&= \frac{P_A(a)}{P_A(S)} \text{ et } (*)\\
&= \frac{P_A(S)\,P_S(a)}{P_A(S)}\\
&= P_S(a)
\end{aligned}$$

b) N.B. L'égalité de deux fonction sur A signifie leur égalité pour tout a de A.

Si v et w sont deux fonctions réelles définies sur A satisfaisant (1) alors pour et tout S de $\mathcal{F}$ et tout $a \in S$

$$\frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)} = \frac{w(a)}{\sum_{b\in S} w(b)}$$

En particulier pour $S = A$, on a pour tout a de A :

$$\begin{aligned}
\frac{v(a)}{\sum_{b\in A} v(b)} &= \frac{w(a)}{\sum_{b\in A} w(b)} \text{ donc}\\
v(a) &= \frac{\sum_{b\in A} v(b)}{\sum_{b\in A} w(b)} w(a)
\end{aligned}$$

et avec $\mu = \frac{\sum_{b\in A} v(b)}{\sum_{b\in A} w(b)}$ on a donc $v = \mu \cdot w$

7) Pour v fonction réelle strictement positive sur A, on pose, pour tout S de $\mathcal{F}$ et a appartenant à S :

$$Q_S(a) = \frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)}$$

On a alors pour tout $a \in S$: $Q_S(a) \geq 0$ et $\sum_{a\in S} Q_S(a) = \dfrac{\sum_{a\in S} v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)} = 1$ et

$$\begin{aligned}
Q_T(S)\,Q_S(a) &= \frac{\sum_{a\in S} v(a)}{\sum_{b\in T} v(b)} \frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)}\\
&= \frac{v(a)}{\sum_{b\in T} v(b)}\\
&= Q_T(a)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Q \text{ vérifie } (*)}$

8) a) Soit v une utilité associé au système de probabilités $(P_S)_{S\in\mathcal{F}}$.

Pour tout S de $\mathcal{F}$ et a et b dans S :

si $v(a) \leq v(b)$ alors

$$P_S(a) = \frac{v(a)}{\sum_{c\in S} v(c)} \leq \frac{v(b)}{\sum_{c\in S} v(c)} = P_S(b)$$

La probabilité que a soit choisit augmente donc avec son utilité.

b) Avec v une utilité associée, pour tout a et b distincts de A :

$$\begin{aligned} P(a,b) &= P_{\{a,b\}}(a) \\ &= \frac{v(a)}{\sum_{c\in\{a,b\}} v(c)} \\ &= \frac{v(a)}{v(a)+v(b)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{v(b)}{v(a)}} \end{aligned}$$

et comme $\ln\left(\dfrac{v(b)}{v(a)}\right) = \ln(v(b)) - \ln(v(a))$ on a,

Conclusion : $\boxed{\text{avec } \rho(a) = \ln(v(a)) \text{ pour tout } a \in A : P(a,b) = \dfrac{1}{1+\exp(\rho(b)-\rho(a))}}$

c) Soit X suivant la loi logistique de fonction de répartition F définie par

$$F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$$

Soient a et b distincts dans A.alors pour $\alpha_{a,b}$ un réel,

$$P(X \leq \alpha_{a,b}) = \frac{1}{1+\exp(-(\alpha_{a,b}))}$$

Conclusion : $\boxed{\text{avec } \alpha_{a,b} = \rho(a) - \rho(b) \text{ on a } P(a,b) = P(X \leq \alpha_{a,b})}$

9) a) Pour tout couple (S,T) d'éléments de $\mathcal{F}$ tel que S inclus dans T, et pour tout a et b de S on a :

$$\begin{aligned} \frac{P_S(a)}{P_S(b)} &= \frac{P_T(S)\,P_S(a)}{P_T(S)\,P_S(b)} \\ &= \frac{P_T(a)}{P_T(b)} \end{aligned}$$

Le rapport des probabilités de choix respectives de a et b est donc indépendant de la sélection de l'ensemble d'action contenant a et b

b) On suppose que l'individu a le choix entre utiliser sa voiture (V) ou le bus dont deux lignes sont possibles : rouge (R) et bleu (B)
(B).

c) L'ensemble des actions est donc $A = \{V,R,B\}$. On suppose que l'individus est indifférent à choisir le bus ou la voiture et également à la couleur du bus.
On définit ainsi $P(V,R) = \frac{1}{2}$ et $P(V,B) = \frac{1}{2}$ et de plus $P_A(R) = P_A(B)$
On a alors

$$P_A(V) + P_A(R) + P_A(B) = 1$$

de plus $P_{\{V,R\}}(R) + P_{\{V,R\}}(V) = 1$ donc *Conclusion :* $\boxed{P_{\{V,R\}}(V) = \frac{1}{2}}$
et $P_A(V) = P_A(\{V,R\})\,P_{\{V,R\}}(V) = (P_A(V) + P_A(R))\,\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}P_A(V) = \frac{1}{2}P_A(R)$ donc
Conclusion : $\boxed{P_A(V) = P_A(R) = P_A(B) = \frac{1}{3}}$
Si le choix entre les 3 modes de transport est indifférent, ils sont équiprobables.

1 III Utilités aléatoires

A chaque action i de l'ensemble d'actions $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ est associé une variable aléatoire U_i représentant l'utilité de l'action i.
L'individu choisit alors l'action qui maximise ces utilités. On suppose les U_i indépendantes, leur fonction de répartition donnée par F_i.
On note U l'utilité maximale : $U = \max(U_1, \ldots, U_n)$

10) a) La fonction de répartition G_n de U est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathrm{P}(U \leq x) \\ &= \mathrm{P}(\max(U_1, \ldots, U_n) \leq x) \\ & \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \leq x\right) \text{ indépendante} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(U_i \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(x) \end{aligned}$$

et dans le cas où les fonctions de répartitions sont identiques $G(x) = F^n(x)$

On suppose que les U_i ont même loi donc même fonction de répartition

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x) \leq 1$.
   - Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x) < 1$ alors $F^n(x) \to 0$ et $G_n(x) \to 0$
   - S'il existe un réel pour lequel F vaut un, alors en le minimum de ces valeurs : a, F (continue) vaut 1
     Donc pour tout $x < a$: $F(x) < 1$ et $G_n(x) \to 0$
     Donc pour tout $x \geq a$: $F(x) = F(a) = 1$ et $G_n(x) = 1 \to 1$

c) Si $G_n = F$ alors $G_n(x) = F(x) \to F(x)$ pour tout x. et cela n'est possible que si $F(x) = 0$ ou 1

   donc F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante.

   Donc les U_i sont toutes constantes.

1. On cherche les lois admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction de répartition est F vérifie que pour tout entier n , il existe $b_n \leq 0$ tel que, pour tout x réel, $(F(x))^n = F(x + b_n)$
   On suppose qu'une telle loi existe et on cherche des conditions qu'elle vérifie.

   a) .F est la fonction de répartition d'une variable à densité, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ etlim$_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$
      Et comme $F' = f > 0$ (une densité) là où f est continue, alors F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
      F réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$

   b) Comme $0 < F(x) < 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(F(x))^{n+1} < (F(x))^n$
      donc $F(x + b_{n+1}) < F(x + b_n)$ et comme F est strictement croissante
      $x + b_{n+1} < x + b_n$ soit $b_{n+1} < b_n$
      Conclusion : $\boxed{(b_n)_{n\geq 1} \text{ est strictement décroissante.}}$

   c) Soit (n, N) un couple d'entiers strictement positifs,. On considère $U_1, \ldots, U_{nN}$, nN variables indépendatesde même loi F et on pose pour j tel que $1 \leq j \leq n$:

$$Y_j = \max\left(U_{(j-1)N+1}, \ldots, U_{jN}\right)$$

Les ensembles d'indices $((j-1)N, \ldots, jN)$ étant disjoints pour les différentes valeurs de j , les Y_j sont indépendants.

d) Comme précédemment la fonction de répartition de Y_j est F^N (car il y a N variables dans la liste définissant Y_j)

e) Sans remarquer que $\max(Y_1, \ldots, Y_n) = \max(U_1, \ldots, U_{nN})$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F(x)^{nN} &= (F(x)^n)^N \\ &= (F(x+b_n))^N \\ &= F(x+b_n+b_N) \end{aligned}$$

et comme $F(x)^{nN} = F(x+b_{nN})$ alors $F(x+b_{nN}) = F(x+b_n+b_N)$
et par bijectivité de F
Conclusion : $\boxed{b_{nN} = b_n + b_N \text{ pour tout couple d'entier } (n,N) \text{ de } \mathbb{N}^*}$

f) Par récurrence sur k :
$b_{n^1} = b_n = 1b_n$
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $b_{n^k} = kb_n$ alors $b_{n^{k+1}} = b_{n^k n} = b_{n^k} + b_n$ d'après e $=.(k+1)\,b_n$
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k : b_{n^k} = kb_n}$

g) Soient p et m deux entiers strictement positifs alors pour $q \in \mathbb{N}$:
$2^q \leq p^m < 2^{q+1}$
$\iff q\ln(2) \leq m\ln(p) < (q+1)\ln(2)$
$\iff q \leq m\frac{\ln(p)}{\ln(2)} < q+1$
$\iff q$ est la partie entière de $m\frac{\ln(p)}{\ln(2)} \geq 0$
Conclusion : $\boxed{\text{l'unique entier est } k_m = \left\lfloor m\frac{\ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor}$

h) avec $q = k_m$, la suite b étant croissante, on a $b_{2^q} \leq b_{p^m} \leq b_{2^{q+1}}$
donc $q\ b_2 \leq n\ b_p < (q+1)\,b_2$ soit
$q \leq n\ \frac{b_p}{b_2} < q+1$ c'est à dire
$n\ \frac{b_p}{b_2} - 1 < \left\lfloor m\frac{\ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor \leq n\ \frac{b_p}{b_2}$..... je coince

i) $F(x) = \exp(-e^{-x})$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f(x) = \exp(-e^{-x})\,e^{-x} > 0$ donc elle satisfait bien les conditions.

12) Soit X de fonction de répartition F.

a) Une densité est donnée par $f(x) = \exp(-e^{-x})\,e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit $Z = e^{-X}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (Z \leq x) &= \left(e^{-X} \leq x\right) \text{ et pour } x > 0 \\ &= (-X \leq \ln(x)) \\ &= (X \geq -\ln(x)) \end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition de Z est, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathrm{P}(X \geq -\ln(x)) \\ &= 1 - F(-\ln(x)) \\ &= 1 - e(-x) \end{aligned}$$

nulle pour tout $x \leq 0$ et on reconnaît
Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \varepsilon(1)}$

c) Soient x et y strictement positifs,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{X\leq -\ln(x)}\left(X\leq -\ln\left(x+y\right)\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(X\leq -\ln\left(x+y\right)\cap X\leq -\ln\left(x\right)\right)}{\mathrm{P}\left(X\leq -\ln\left(x\right)\right)} \\ &= \frac{\mathrm{P}\left(X\leq -\ln\left(x+y\right)\right)}{\mathrm{P}\left(X\leq -\ln\left(x\right)\right)} \text{ car } -\ln\left(x+y\right)\leq -\ln\left(x\right) \\ &= \frac{F\left(-\ln\left(x+y\right)\right)}{F\left(-\ln\left(x\right)\right)} \\ &= \frac{\exp\left(-\left(x+y\right)\right)}{\exp\left(-x\right)} \\ &= \exp\left(-y\right) \\ &= \mathrm{P}\left(X\leq -\ln\left(y\right)\right) \end{aligned}$$

d) On considère $(Y_i)_{i\geq 1}$ indépendantes de loi $\varepsilon(1)$ et $L\hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ indépendantes des $(Y_i)_{i\geq 1}$
$W=\max(Y_1,\ldots,Y_L)$ si $L\geq 1$ et $W=0$ si $L=0$
Pour tout réels a et b tels que $0<a<b$, on a $(L=k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(a\leq W\leq b\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}_{L=k}\left(a\leq W\leq b\right)\mathrm{P}\left(L=k\right) \\ &= \mathrm{P}_{L=0}\left(a\leq 0\leq b\right)\mathrm{P}\left(L=0\right)+\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}_{L=k}\left(a\leq W\leq b\right)\mathrm{P}\left(L=k\right) \end{aligned}$$

Quand $L=k$ on a $W=\max(Y_1,\ldots,Y_k)$ donc pour tout b

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(W\leq b\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}Y_i\leq b\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k}\mathrm{P}\left(Y_i\leq b\right) \\ &= \left(1-e^{-b}\right)^k \text{ et} \\ \mathrm{P}\left(a<W\leq b\right) &= \mathrm{P}\left(W\leq b\right)-\mathrm{P}\left(W\leq a\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(a<W\leq b\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\left(1-e^{-b}\right)^k-\left(1-e^{-a}\right)^k\right]\frac{1^k}{k!}e^{-1} \\ &= e^{-1}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(1-e^{-b}\right)^k-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(1-e^{-a}\right)^k\right] \\ &= e^{-1}\left[\exp\left(1-e^{-b}\right)-\exp\left(1-e^{-a}\right)\right] \\ &= e^{-1}\left[e\exp\left(-e^{-b}\right)-e\exp\left(-e^{-a}\right)\right] \\ &= \exp\left(-e^{-b}\right)-\exp\left(-e^{-a}\right) \\ &= F\left(b\right)-F\left(a\right) \\ &= \mathrm{P}\left(a<X\leq b\right) \end{aligned}$$

Si $L>0$ alors $\mathrm{P}_{L>0}\left(W=0\right)=0$ et $\mathrm{P}_{L=0}\left(W=0\right)=1$ donc $\mathrm{P}\left(W=0\right)=\mathrm{P}\left(L=0\right)=e^{-1}$ (avec le système complet d'événements $(L=0,L>0)$)

et donc , W n'est pas à densité et pour conclure avec $\mathrm{P}(a \leq W \leq b)$, dans le cadre du programme de la ECE, on est en peine !

Conclusion à part la première partie... que c'est verbeux et creux et inintéressant.
Et il doit y avoir encore quantité d'autres adjectifs pour le caractériser ... :-O
Et il n'y a pas de happy end pour sauver le navire du naufrage !