ESSEC

MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

**Option économique**

**MATHEMATIQUES III**

*Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

## EXERCICE 1 *(Etude d'une suite de nombres réels)*

On étudie dans cet exercice la suite $(S_n)$ définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

A cet effet, on introduit pour tout nombre entier $k \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)dt.$$

1°) Convergence de la suite $(J_k/I_k)$

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel $t$ tel que $0 \leq t \leq \pi/2$ :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 0$ :

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1}).$$

c) Exprimer $I_{k+1}$ en fonction de $I_k$ en intégrant par parties l'intégrale $I_{k+1}$ (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que $J_k/I_k$ tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$.



ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC ACTING FIRST
agir en pionnier
ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION
FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE
DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

2°) Convergence et limite de la suite $(S_n)$

a) Exprimer $I_k$ en fonction de $J_k$ et $J_{k-1}$ en intégrant deux fois par parties l'intégrale $I_k$ ($k \geq 1$).

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$ :

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}.$$

c) Calculer $J_0$ et $I_0$, puis déterminer la limite $S$ de la suite $(S_n)$.

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$ :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que :

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

*Autrement dit,* $S_n + \dfrac{1}{n}$ *constitue une valeur approchée de* $S$ *à* $\dfrac{1}{n^2}$ *près.*

e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre $S$ à $10^{-6}$ près.

## EXERCICE 2 *(Algèbre linéaire et étude d'une marche aléatoire)*

Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.

### Partie I

On associe à tout triplet $(x, y, z)$ de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par :

$$M(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité $I_3$ et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée $J$.

1°) L'espace vectoriel $E$ des matrices $M(x, y, z)$

a) Calculer les matrices $J^2$ et $J^3$.

b) Etablir que l'ensemble $E$ des matrices de la forme $M(x, y, z)$ où $(x, y, z)$ décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

c) Etablir que $(I_3, J, J^2)$ forme une base de $E$.

2°) Matrices inversibles de l'espace vectoriel $E$

a) Calculer le produit $M(x, y, z) \times M(x', y', z')$ et montrer que celui-ci est élément de $E$.
Les matrices $M(x, y, z)$ et $M(x', y', z')$ commutent-elles?

b) En déduire l'égalité suivante :

$$M(x,y,z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] I_3.$$

c) Etablir qu'une condition suffisante pour que $M(x, y, z)$ soit inversible est que $x, y, z$ soient tels que $x+y+z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x, y, z)$?

d) Etablir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

3°) Eléments propres des matrices $M(x, y, z)$

a) Etablir qu'un nombre réel $\lambda$ est valeur propre de $M(x, y, z)$ si et seulement si $M(x-\lambda, y, z)$ n'est pas inversible.

b) Montrer que $x+y+z$ est valeur propre de $M(x, y, z)$ et préciser le sous-espace propre associé.

c) On suppose ici que $y \neq z$. Montrer que $M(x, y, z)$ n'a pas d'autre valeur propre.
La matrice $M(x, y, z)$ est-elle diagonalisable?

d) On suppose ici que $y = z$. Montrer sans calcul que $M(x, y, y)$ est diagonalisable, et préciser quelles sont ses valeurs propres.

4°) Diagonalisation des matrices $M(x, y, y)$

a) Calculer les produits matriciels suivants :

$$M(x,y,y)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{bmatrix}+1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{bmatrix}+1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

b) Déterminer deux matrices $P$ et $P^{-1}$ inverses l'une de l'autre telles que :

$$P^{-1}\,M(x,y,y)\,P = \begin{bmatrix}x+2y & 0 & 0\\ 0 & x-y & 0\\ 0 & 0 & x-y\end{bmatrix}.$$

c) En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel $n$ :

$$[M(x, y, y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n\, M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x-y)^n\, M(2, -1, -1).$$

**Partie II**

On désigne dans toute cette partie par $p$ un nombre réel tel que $0 < p < 1/2$ et on considère la marche aléatoire d'un point $S$ sur les sommets d'un triangle $ABC$.

A l'instant initial $t = 0$, le point $S$ est en $A$, et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si $S$ est à l'instant $n$ au sommet $A$ du triangle :
  il est à l'instant $n+1$ au sommet $B$ avec la probabilité $p$, au sommet $C$ avec la probabilité $p$, ou encore au sommet $A$ avec la probabilité $1-2p$.
- Si $S$ est à l'instant $n$ au sommet $B$ du triangle :
  il est à l'instant $n+1$ au sommet $C$ avec la probabilité $p$, au sommet $A$ avec la probabilité $p$, ou encore au sommet $B$ avec la probabilité $1-2p$.
- Si $S$ est à l'instant $n$ au sommet $C$ du triangle :
  il est à l'instant $n+1$ au sommet $A$ avec la probabilité $p$, au sommet $B$ avec la probabilité $p$, ou encore au sommet $C$ avec la probabilité $1-2p$.

Pour tout nombre entier naturel $n$, on désigne enfin par :

- $A_n$ l'événement "le point $S$ est au sommet $A$ à l'instant $n$" et par $a_n$ sa probabilité.
- $B_n$ l'événement "le point $S$ est au sommet $B$ à l'instant $n$" et par $b_n$ sa probabilité.
- $C_n$ l'événement "le point $S$ est au sommet $C$ à l'instant $n$" et par $c_n$ sa probabilité.

1°) Calcul des probabilités $a_n$, $b_n$, $c_n$

a) Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ en fonction des probabilités $a_n$, $b_n$, $c_n$.

b) En déduire une matrice $M$ telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel $n$ :

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

c) En déduire en fonction de $p$ les probabilités $a_n$, $b_n$, $c_n$ et leurs limites quand $n$ tend vers $+\infty$.

2°) <u>Nombres moyens des passages en $A$, $B$, $C$ entre les instants 1 et $n$</u>

a) On désigne dans cette question par $X_n$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque $S$ est au sommet $A$ à l'instant $n$, et prenant la valeur 0 sinon..

Interpréter la variable aléatoire $X_1+X_2+ \ldots +X_n$ et son espérance $m_n = E(X_1+X_2+ \ldots +X_n)$, puis établir que :

$$m_n = \frac{1}{3}[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}].$$

Donner un équivalent de $m_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les espérances des nombres de passage du point $S$ au sommet $B$ et au sommet $C$ entre les instants 1 et $n$ (compris).

3°) <u>Instant moyen du premier passage du point $S$ aux sommets $B$ ou $C$</u>

a) Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $B_{n+1}$ sachant que l'événement $\overline{B}_n$ (événement contraire de $B_n$) est réalisé.

b) On note $T_B$ la variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point $S$ est au sommet $B$. Déterminer la loi de $T_B$, puis l'espérance $E(T_B)$ de $T_B$.

c) Que dire de $T_C$, variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point $S$ est au sommet $C$ ?

***