CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème se compose de cinq parties : il étudie deux suites de variables aléatoires discrètes et une simulation informatique.
Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.
Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à k-1), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.
On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Partie 1.

1. On pose : $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$

a. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

où ln désigne le logarithme népérien.

b. En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln n$

c. Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

2. On pose : $k_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$

a. Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$

b. En déduire la majoration : $k_n \leq 2.$

c. Déterminer un équivalent simple de h_n - k_n quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire X_n.

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1.a. Quelle est la loi de I_n?

b. Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $I_n = 1$?

c. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $\forall j \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in \{2, \ldots, n\} \quad P(X_n = j / I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1).$

2.a. Quelle est la loi de X_1 ?

b. Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

c. Calculer $P(X_3 = 2 / I_3 = 1)$, $P(X_3 = 2 / I_3 = 2)$, $P(X_3 = 2 / I_3 = 3)$. Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

3.a. Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

c. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation : $\forall j \geq 2 \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1).$

d. Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j).$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geq 1 \quad P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1).$$

4.a. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant 3.d. : $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$

b. En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

5.a. Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.

b. En déduire : $V(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations introduites en Partie 1).

c. Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

6. Soit $(T_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + \ldots + T_n$.

a. Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

b. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul :

$$P(S_n = j) = \frac{1}{n} P(S_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(S_{n-1} = j).$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

c. Retrouver ainsi $E(X_n)$ *et* $V(X_n)$.

Partie 3 : Etude de la variable aléatoire Y_n.

1. Donner la loi de Y_1.

2.a. Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?

b. Déterminer la loi de Y_2.

3.a. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$P(Y_n = j \,/\, I_n = k) = P(Y_{k-1} = j-k).$$

b. Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1 :

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j-n).$$

c. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$.

Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?

Partie 4. Simulation informatique.

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction *random(n)* renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et n-1. On donne la procédure suivante :

```
Procedure Truc ( n : integer ; var a , b : integer) ;
Var alea : integer ;
Begin
        alea : = random (n) + 1 ;
        writeln (alea) ;
        if alea > 1 then  begin
                                a := a + 1 ;
                                b := b + alea ;
                                Truc ( alea - 1 , a , b)
                          end ;
End ;
```

et le programme principal suivant :

```
Var n , a , b : integer ;
Begin
        a := 1 ; b := 1 ;
        write ('n : ') ; readln (n);
        Truc ( n , a , b) ;
        writeln ('a = ' , a , 'b = ', b );
End.
```

1. Que fait ce programme ? Que représentent a et b ?
2. Cet algorithme est récursif. Transformer ce programme en un programme itératif écrit en Pascal.

Partie 5.

On considère l'urne U_n contenant n boules numérotées entre 1 et n. A partir de l'urne U_n, on effectue la suite de tirages décrite dans l'en-tête du problème. Pour i entier de $\{1,\ldots,n\}$, on définit $Z_i^{(n)}$ la variable aléatoire égale à 1 si, lors d'un quelconque de ces tirages, on a obtenu la boule numéro i, égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de $Z_n^{(n)}$? Que dire de la variable $Z_1^{(n)}$?

2.a. Si n est supérieur ou égal à 2, et i un entier de $\{1,\ldots,n-1\}$, montrer la relation :

$$P(Z_i^{(n)}=1)=\frac{1}{n}+\sum_{k=i+1}^{n}\frac{1}{n}P(Z_i^{(k-1)}=1).$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/i$.

3. Que vaut $\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}$? Retrouver ainsi $E(X_n)$.

4. Retrouver $E(Y_n)$.