

Exercice

1.

- (a) Pour tout entier n non nul, la fonction $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $[0, 1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$ est positive, ce qui signifie que c_n est un réel positif. D'autre part, on a :

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}$ est continue et négative sur $[0, 1]$ donc l'intégrale ci-dessus est négative donc $c_{n+1} - c_n \leq 0$ et la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(b)

$$c_{n+1} + c_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

(c) Puisque c_n est positif, la relation de récurrence montre que

$$c_n = \frac{1}{n} - c_{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

La relation de récurrence (1) combinée à la décroissance de la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ (cf. question 1a) nous fournissent les encadrement suivants :

$$\forall n \geq 1, \quad 2c_{n+1} \leq c_n + c_{n+1} \leq 2c_n \Leftrightarrow 2c_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 2c_n.$$

En particulier, la seconde inégalité nous donne $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n} \leq 2c_n$ et en remplaçant n par $n-1$ dans la première inégalité, on obtient $\forall n \geq 2, \quad 2c_n \leq \frac{1}{n-1}$ donc

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

En multipliant par n de part et d'autre de cet encadrement, on obtient

$$1 \leq 2nc_n \leq \frac{n}{n-1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, l'application du théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nc_n = 1 \Leftrightarrow 2nc_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \Leftrightarrow c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

- (d) $c_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_{x=0}^{x=1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

On pose $(\mathcal{H}_n) : c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right).$

⁰ par Abdellah BECHATA

Initialisation : (\mathcal{H}_2) est vraie car, la relation de récurrence de la suite (c_n) nous donne

$$c_2 = \frac{1}{1} - c_1 = 1 - \ln 2 \text{ et } (-1)^2 \left(\sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) = \frac{(-1)^2}{1} - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

Hérédité : Supposons que (\mathcal{H}_n) est vraie i.e. " $c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$ ". On a

$$c_{n+1} = \frac{1}{n} - c_n = \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) = \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - (-1)^{n+1} \ln 2.$$

D'autre part, la relation de Chasles montre que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Rightarrow (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

donc

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} - (-1)^{n+1} \ln 2 = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right),$$

ce qui démontre que (\mathcal{H}_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 2$, (\mathcal{H}_n) est vraie i.e. $\forall n \geq 2$, $c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$.

(e)

```

program cn ;
uses crt ;
var c : real ; var n,k,p : integer ;
begin
clrscr ;
{efface l'écran DOS}
writeln ( 'donner le rang n' ) ;
{initialisation la variable p qui calcule (-1)^{k+1} et la variable c qui calcule la somme}
p := -1, c := 0 ;
for k=1 to n-1 do
begin
p := (-1)*p ; c := c + (p/k) ;
end ;
{la dernière valeur stockée par p est (-1)^n }
c := p*(c - ln(2)) ;
writeln ('c( ', n, ' ) = ', c) ;
repeat until keypressed ;
end.

```

2.

- (a) En considérant les bornes des deux intégrales, il faut un changement de variable qui transforme le segment $[1, x]$ en $[1, \frac{1}{x}]$. On pense naturellement au changement de variable $u = \frac{1}{t}$. Si $t = 1$ alors $u = 1$ et si $t = x$ alors $u = \frac{1}{x}$. D'autre part, on a $t = \frac{1}{u}$ donc $dt = -\frac{du}{u^2}$, ce qui nous donne

$$\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_1^{1/x} -\frac{\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^n}(1+\frac{1}{u})} = -\int_1^{1/x} \frac{u^{n-1}}{1+u} du = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du. \quad (2)$$

- (b) Puisque la fonction $u \mapsto \frac{u^{n-1}}{1+u}$ est continue sur $[0, 1]$ donc la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du$ existe et est continue sur $[0, 1]$. En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = c_n \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = c_n \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = c_n.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^n(1+t)}$ étant continue et positive sur $[1, +\infty[$, cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)}$ existe, ce qui est notre cas. Par conséquent, la fonction f_n est intégrable sur \mathbb{R} et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n(1+t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = c_n \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n(1+t)} = \frac{c_n}{c_n} = 1.$$

donc f_n est bien une densité de probabilité.

- (c) La variable X_n admet une espérance si et seulement si la fonction $x \mapsto x f_n(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^n(1+x)} = \frac{1}{x^{n-1}(1+x)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. C'est une fonction continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\frac{1}{x^{n-1}(1+x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^n}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $n > 1$, c'est-à-dire que $n \geq 2$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{n-1}(1+x)}$ est intégrable si et seulement si $n \geq 2$. Par conséquent, X_n admet une densité si et seulement si $n \geq 2$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = \frac{1}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^n(1+x)} dx = \frac{1}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-1}(1+x)} \\ &= \frac{c_{n-1}}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{c_{n-1} x^{n-1}(1+x)} = \frac{c_{n-1}}{c_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(x) dx = \frac{c_{n-1}}{c_n}. \end{aligned}$$

- (d) De façon évidente, si $x < 1$, $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt = 0$. Si $x \geq 1$, puisque $c_1 = \ln 2$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt = \int_1^x f_1(t) dt = \frac{1}{\ln 2} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)}.$$

On utilise ensuite l'égalité (2) pour $n = 1$ donc

$$\forall x \geq 1, \quad F_1(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_{1/x}^1 \frac{du}{1+u} = \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+u)]_{u=1/x}^{u=1} = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln 2}.$$

Ainsi, puisque $P(X_1 \leq y) = F_1(y)$ donc, en utilisant que $\ln 2 > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq y) \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}{\ln 2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}{\ln 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Pour déterminer une densité de Z , il suffit de calculer sa fonction de répartition. Pour commencer, nous avons l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Z \leq x) = P(\ln X_1 \leq x) = P(X_1 \leq e^x) = F_1(e^x)$$

et, puisque $e^x > 0$, on en déduit que $P(Z \leq x) = 0$ si $e^x < 1$, c'est-à-dire que $x < 0$. Si $x \geq 0$, alors $e^x \geq 1$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P(Z \leq x) = F_1(e^x) = 1 - \frac{\ln(1 + \frac{1}{e^x})}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\ln 2}.$$

En résumé, on a :

$$P(Z \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\ln 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Puisque $x \mapsto P(Z \leq x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^\times et, en utilisant que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(e^u)' = u'e^u$, sa dérivée sur \mathbb{R}^\times est

$$\forall x < 0, \quad (P(Z \leq x))' = 0 \text{ et } \forall x > 0, \quad (P(Z \leq x))' = -\frac{1}{\ln 2} \times \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{e^x + 1}.$$

Nous pouvons choisir comme densité de Z la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{e^x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (e) Pour tout réel $x \geq 1$, $\frac{1}{x} \in]0, 1]$ donc l'intervalle $[\frac{1}{x}, 1]$ est inclus dans $[0, 1]$. La positivité de la fonction $u \mapsto \frac{u^n}{(1+u)^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et le fait que

$$\forall u \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1+u)^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{u^n}{(1+u)^2} \leq u^n.$$

montrent que

$$0 \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du + \int_0^{1/x} \frac{u^n}{(1+u)^2} du = \int_0^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leq \int_0^1 u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque nous disposons de l'encadrement ci-dessus et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du = 0.$$

Pour $x > 1$, en utilisant l'égalité (2) montre que

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_1^x f_n(t) dt = \frac{1}{c_n} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \frac{1}{c_n} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du.$$

Pour l'intégration par partie, il suffit de dériver $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ et d'intégrer $u \mapsto u^{n-1}$. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{1+u} \\ \beta' = u^{n-1} \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha' = -\frac{1}{(1+u)^2} \\ \beta' = \frac{u^n}{n} \end{cases} \text{ donc}$$

$$\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = \left[\frac{u^n}{n} \times \frac{1}{1+u} \right]_{u=1/x}^{u=1} - \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{n} \times \frac{-1}{(1+u)^2} du = \frac{1}{2n} - \frac{1}{nx^{n-1}(1+x)} + \frac{1}{n} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du = .$$

Par conséquent, nous en déduisons l'égalité

$$F_n(x) = \frac{1}{2nc_n} - \frac{1}{nc_n} \times \frac{1}{x^{n-1}(1+x)} + \frac{1}{nc_n} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du.$$

Nous avons montré lors de la question 1c que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nc_n = \frac{1}{2}$. Puisque $x > 1$, la suite $\left(\frac{1}{x^{n-1}(1+x)} \right)_n$ tend vers 0 et la suite $\left(\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right)_n$ converge vers 0 donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1 - 2 \times 0 + 2 \times 0 = 1.$$

(f) Si $x \leq 1$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$.

Soit X la variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) dont la fonction de répartition est $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Alors, pour tout réel x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$, ce qui signifie que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X .

La variable X est remarquable. En effet, si a et b sont inférieurs à 1 alors

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = 0 - 0 = 0,$$

si a et b sont supérieurs à 1 alors

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = 1 - 1 = 0,$$

et si $a < 1$ et $b \geq 1$ alors

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = 1 - 0 = 1.$$

Si l'on considère une suite (a_n) croissante convergeant vers 1 et (b_n) une suite décroissante convergeant vers 1, la famille l'évènement $(a_n \leq X \leq b_n)$ est décroissante donc

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(a_n \leq X \leq b_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} (a_n \leq X \leq b_n)\right) = P(X = 1).$$

Cette variable X prend donc presque sûrement la valeur 1 donc $X = 1$ au sens des probabilités !

Problème

Partie A

1. Soient $P = \sum_{k=0}^{2n} p_k x^k$, $Q = \sum_{k=0}^{2n} q_k x^k \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{2n} (p_k + \lambda q_k) x^k$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad s(P + \lambda Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} (p_{2n-k} + \lambda q_{2n-k}) x^k = \sum_{k=0}^{2n} p_{2n-k} x^k + \lambda \sum_{k=0}^{2n} q_{2n-k} x^k = s(P)(x) + \lambda s(Q)(x),$$

ce qui démontre que $s(P + \lambda Q) = s(P) + \lambda s(Q)$.

2.

(a) La matrice M est carrée et symétrique donc elle est diagonalisable. Déterminons ses valeurs propres.

Le réel λ est une valeur propre de M si et seulement si la matrice $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non

inversible, ce qui signifie que le système $\begin{cases} -\lambda a + c = 0 \\ (1 - \lambda)b = 0 \\ a - \lambda c = 0 \end{cases}$ n'est pas de Cramer..

$$\begin{cases} -\lambda a + c = 0 \\ (1 - \lambda)b = 0 \\ a - \lambda c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} a - \lambda c = 0 \\ (1 - \lambda)b = 0 \\ -\lambda a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1} \begin{cases} a & -\lambda c & = 0 \\ (1 - \lambda)b & & = 0 \\ (1 - \lambda^2)c & = 0 & = 0 \end{cases} .$$

Ce dernier système étant carré et triangulaire, il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire $1 - \lambda = 0$ ou $(1 - \lambda^2) = 0$, ce qui signifie que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Déterminons les espaces propres. Pour éviter les confusions, on évite d'utiliser les lettres X et x (qui sont liées aux polynômes) pour les vecteurs et x pour les coordonnées (qui sont des éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{-1}(M) \Leftrightarrow (M + I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 2b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-1}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1(M) \Leftrightarrow (M - I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ 0 = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a = c) \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} c \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. De façon évidente, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc

ils forment une famille libre de $E_1(M)$. On retrouve ainsi que $\dim E_{-1}(M) + \dim E_1(M) = 3$ donc M est diagonalisable.

(b) Il suffit d'expliquer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par s

$$\begin{aligned} s(1) &= s(\underline{1}.X^0 + \underline{0}.X^1 + \underline{0}.X^2) = \underline{1}.X^2 = X^2, \\ s(X) &= s(\underline{0}.X^0 + \underline{1}.X^1 + \underline{0}.X^2) = \underline{1}.X^1 = X, \\ s(X^2) &= s(\underline{0}.X^0 + \underline{0}.X^1 + \underline{1}.X^2) = \underline{1}.X^0 = 1. \end{aligned}$$

donc la matrice de s dans la base canonique est bien $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$. Par définition de la matrice

d'une application linéaire, l'égalité $M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à l'égalité

$$s(-1.1 + 0.X + 1.X^2) = -(-1.1 + 0.X + 1.X^2) \Leftrightarrow s(-1 + X^2) = -(-1 + X^2)$$

donc le polynôme $P_1 = -1 + X^2$ est un vecteur propre de s associé à la valeur propre -1 et il forme une base de cet espace propre. De même, si l'on pose $P_2 = 1.1 + 0.X + 1.X^2 = 1 + X^2$ et $P_3 = 0.1 + 1.X + 0.X^2 = X$, les polynômes P_2 et P_3 sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1 et ils forment une base de cet espace propre.

3.

- (a) Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} p_k X^k$ un élément de E .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (s \circ s)(P)(x) = s(s(P)(x)) = s\left(\sum_{k=0}^{2n} p_{2n-k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} p_{2n-(2n-k)} x^k = \sum_{k=0}^{2n} p_k x^k = P(x)$$

donc $s \circ s = \text{Id}_E$.

- (b) Si $s(P) = \lambda P$ alors $(s \circ s)(P) = s(s(P)) = s(\lambda P) = \lambda s(P) = \lambda^2 P$. Or $(s \circ s)(P) = \text{Id}_E(P) = P$ donc $P = \lambda^2 P$ ce qui équivaut à $(1 - \lambda^2)P = 0$. Puisque P est un vecteur propre de s , il est non nul donc $1 - \lambda^2 = 0$, ce qui signifie que $\lambda \in \{-1, 1\}$.
- (c) Par définition de s , pour tout entier $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a $s(X^k) = X^{2n-k}$, ce qui nous donne par linéarité de s :
- Si $0 \leq k \leq n-1$, alors $s(A_k)(x) = s(x^{2n-k} + x^k) = s(x^{2n-k}) + s(x^k) = x^{2n-(2n-k)} + x^{2n-k} = x^k + x^{2n-k} = A_k(x)$
 - Si $k = n$, alors $s(A_n)(x) = s(x^n) = x^{2n-n} = x^n = A_n(x)$
 - Si $n+1 \leq k \leq 2n$, alors $s(A_k)(x) = s(x^{2n-k} - x^k) = s(x^{2n-k}) - s(x^k) = x^{2n-(2n-k)} - x^{2n-k} = x^k - x^{2n-k} = -A_k(x)$.

- (d) Puisque la dimension de E est $2n+1$ et que la famille $(A_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est de cardinal $2n+1$, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient (a_0, \dots, a_{2n}) une famille de réels tels que $\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n = 0$. Or nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} a_n A_n &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k + a_n A_n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k A_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X^k + X^{2n-k}) + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k (X^k - X^{2n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{2n-k} + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^k - \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^{2n-k}. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $j = 2n-k \Leftrightarrow k = 2n-j$ dans les deux sommes faisant intervenir les exposants $2n-k$, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n-k} X^k + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{2n-k}) X^k + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^k$$

Ainsi le coefficient de X^k du polynôme $\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n$ est $a_k - a_{2n-k}$ si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, a_n si $k = n$ et $a_k + a_{2n-k}$

si $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$. Dire que le polynôme $\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n$ est nul signifie que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire que $a_n = 0$ et

$$\text{pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : a_0 = a_{2n}, a_1 = a_{2n-1}, \dots, a_k = a_{2n-k}, \dots, a_{n-2} = a_{n+2}, a_{n-1} = a_{n+1},$$

$$\text{et pour } k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket : a_{n+1} = -a_{n-1}, a_{n+2} = -a_{n-2}, \dots, a_{2n-k} = -a_k, \dots, a_{2n-1} = -a_1, a_{2n} = -a_0.$$

On en déduit que $a_0 = a_{2n} = -a_0$ donc $2a_0 = 0$ et $a_{2n} = a_0 = 0$. De même, $a_1 = a_{2n-1} = -a_1$ donc $2a_1 = 0$ et $a_{2n-1} = 0$. Plus généralement, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = a_{2n-k} = -a_k$ donc $a_k = 0$ et $a_{2n-k} = 0$, ce qui prouve que tous les coefficients (a_k) sont nuls et la famille $(A_k)_{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket}$ est libre donc c'est une base de E .

- (e) Puisque tous les polynômes A_k sont non nuls, la question 3c montre que tous les polynômes A_k sont des vecteurs propres de s et comme ils forment une base de E , on en déduit que s est diagonalisable. Ses valeurs propres sont -1 et 1 . L'espace propre associé à -1 est engendré par les A_k lorsque $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ et, cette famille étant libre et de cardinal $2n - (n+1) + 1 = n$, on a $\dim E_{-1}(s) = n$. De même, l'espace propre associé à 1 est engendré par les A_k lorsque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et, cette famille étant libre de cardinal $n - 0 + 1 = n + 1$, on a $\dim E_1(s) = n + 1$.

Partie B

1.

- (a) $R_3(x) = xR_2(x) - R_1(x) = x(x^2 - 2) - x = x^3 - 3x$
 $R_4(x) = -xR_3(x) - R_2(x) = x(x^3 - 3x) - (x^2 - 2) = x^4 - 4x^2 + 2.$
- (b) On procède par récurrence forte.

On pose (\mathcal{P}_k) : "pour tout $j \leq k$, le polynôme R_j est de degré j et $R_j(x + \frac{1}{x}) = x^j + \frac{1}{x^j}$.

Initialisation : $k = 1$. R_1 est un polynôme de degré 1 et $R_1(x + \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$ donc (\mathcal{P}_1) est vraie.

Hérédité : Supposons que (\mathcal{P}_k) est vraie. En particulier, R_k est un polynôme de degré k avec $R_k(x + \frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$ et R_{k-1} est un polynôme de degré $k-1$ avec $R_{k-1}(x) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$. Le polynôme $x \mapsto xR_k(x)$ étant de degré $k+1$ et le polynôme R_{k-1} étant de degré $k-1$, le polynôme $x \mapsto xR_k(x) - R_{k-1}(x) = R_{k+1}(x)$ est de degré $k+1$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} R_{k+1}(x + \frac{1}{x}) &= (x + \frac{1}{x})R_k(x + \frac{1}{x}) - R_{k-1}(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) \\ &= x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $j \leq k$, le polynôme R_j est de degré j et $R_j(x + \frac{1}{x}) = x^j + \frac{1}{x^j}$ et que R_{k+1} est de degré $k+1$ et $R_{k+1}(x + \frac{1}{x}) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$, on en déduit que (\mathcal{P}_{k+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall k \geq 1$, (\mathcal{P}_k) est vraie donc $\forall k \in \mathbb{N}^\times$, c'est-à-dire R_k est un polynôme de degré k avec $R_k(x + \frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$.

- (c) $x + \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = a \Leftrightarrow x^2 + 1 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $a^2 - 4$.
- Si $a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a \in]-2, 2[$ alors l'équation n'a aucune solution,
 - Si $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ alors l'équation a comme unique solution $x = 1$,
 - Si $a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors l'équation a deux racines $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ et $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

2.

- (a) De façon évidente $Q(0) = a_0$ et puisque $a_0 = a_{2n} \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de Q .
- (b) Nous avons l'égalité

$$\frac{Q(x)}{x^n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{x^k}{x^n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a_n x^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n}.$$

Puisque $k - n < 0$ lorsque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et, en utilisant le changement de variable $k = 2n - j \Leftrightarrow j = 2n - k \Leftrightarrow k - n = n - j$ dans la seconde somme, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{x^n} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}} + a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-j} x^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}} + a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{n-j} = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{1}{x^{n-k}} + x^{n-k} \right) \\ &= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_{n-k}(x + \frac{1}{x}) = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_{n-k}(y) \underset{j=n-k}{=} a_n + \sum_{j=1}^n a_{n-j} R_j(y) = \tilde{Q}(y). \end{aligned}$$

Donc $\frac{Q(x)}{x^n} \neq 0$ si et seulement si $\tilde{Q}(y) \neq 0$.

Puisque 0 n'est pas racine de Q , l'équation $Q(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\frac{Q(x)}{x^n} = 0$ qui est

identique à l'équation $\tilde{Q}(y) = 0$. On a ainsi ramené une équation de degré $2n$ à une équation de degré n dont la résolution est à priori plus simple. Si $\{y_1, \dots, y_s\}$ sont les racines de cette équation, il ne restera plus qu'à résoudre les très simples équations $x + \frac{1}{x} = y_j$ pour trouver toutes les racines réelles de Q .

- (c) Le polynôme $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$ est de degré $6 = 2 \times 3$ et ses coefficients vérifient bien les symétries $a_k = a_{6-k}$. Puisque $a_3 = 2, a_2 = -9, a_1 = 1, a_0 = 1$, si l'on pose $y = x + \frac{1}{x}$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y) &= 2 + a_{3-1}R_1(y) + a_{2-1}R_2(y) + a_{3-3}R_3(y) = 2 + a_2R_1(y) + a_1R_2(y) + a_0R_3(y) \\ &= 2 - 9R_1(y) + R_2(y) + R_3(y) = 2 - 9y + y^2 - 2 + y^3 - 3y = y^3 + y^2 - 12y = y(y^2 + y - 12) \end{aligned}$$

Le trinôme $y^2 + y - 12$ admet comme discriminant $49 = 7^2$ donc ses racines sont -4 et 3 . L'équation $\tilde{Q}(y) = 0$ a pour solution $y = 0$ ou $y = 3$ ou $y = -4$. Puisque $y = x + \frac{1}{x}$, la question 1c montre que

l'équation $x + \frac{1}{x} = 0$ n'a aucune solution, l'équation $x + \frac{1}{x} = 3$ admet comme solution $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et l'équation $x + \frac{1}{x} = -4$ admet comme solution $\frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}$ et $x = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3}$. Par conséquent, l'ensemble des racines de Q est l'ensemble

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3} \right\}.$$

Partie C

1. $n = 2$ donc $E = \mathbb{R}_2[X] = \{P = a + bX + cX^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$ et $\Omega = \{P = a + bX + cX^2, \quad a, b, c \in \llbracket 1, 2 \rrbracket\}$. Puisque chaque coefficient à deux possibilités, l'ensemble Ω contient $2^3 = 8$ éléments

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \underbrace{1 + X + X^2}_{Z=3}, \underbrace{1 + X + 2X^2}_{Z=1}, \underbrace{1 + 2X + X^2}_{Z=3}, \underbrace{2 + X + X^2}_{Z=1}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{1 + 2X + 2X^2}_{Z=1}, \underbrace{2 + X + 2X^2}_{Z=3}, \underbrace{2 + 2X + X^2}_{Z=1}, \underbrace{2 + 2X + 2X^2}_{Z=3} \right\} \end{aligned}$$

De cette explicitation, on constate que $Z(\Omega) = \{1, 3\}$ et que

$$P(Z = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ et } P(Z = 3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

donc

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad E(Z^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5, \quad V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ un élément de Ω .
- (a) On a p choix pour chaque coefficient de P et, puisque que P possède $2n + 1$ coefficients, on en déduit que $\text{card } \Omega = p^{2n+1}$.
- (b) Puisque $2n - n = n$, on en déduit que $a_n = a_{2n-n}$ donc P admet au moins une incidence, ce qui implique que $Z \geq 1$. En particulier, l'évènement $(Z = 1)$ signifie que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, a_k \neq a_{2n-k}$. Pour chaque entier $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a p choix possible pour a_k . Puisque les n coefficients a_0, \dots, a_{n-1} ne sont soumis à aucune condition, on a p^n choix. Il reste à sélectionner les coefficients a_{n+1}, \dots, a_{2n} . Puisque $a_{n+1} \neq a_{2n-(n+1)} = a_{n-1}$, on a $(p - 1)$ choix pour a_{n+1} . Par le même raisonnement, on voit que l'on a $(p - 1)$ choix pour chaque a_k lorsque $k \in \llbracket n + 1, 2n \rrbracket$, ce qui nous fait $(p - 1)^n$ choix pour les n coefficients a_{n+1}, \dots, a_{2n} . Le dernier coefficient a_n n'étant soumis à aucune condition, on a p choix. Par conséquent, on obtient que $P(Z = 1)$ est égal

$$P(Z = 1) = \frac{p^n \times (p - 1)^n \times p}{p^{2n+1}} = \frac{(p - 1)^n}{p^n} = \left(\frac{p - 1}{p} \right)^n.$$

- (c) Le polynôme P admettant $2n + 1$ coefficients, il ne peut y avoir plus de $2n + 1$ coïncidences. Si P possède $2n + 1$ coïncidences, cela signifie que $a_0 = a_{2n}$, $a_1 = a_{2n-1}$, ..., $a_{n-1} = a_{n+1}$ et $a_n = a_n$. Ainsi, la connaissance des a_0, \dots, a_{n-1}, a_n fournit la connaissance des a_{2n}, \dots, a_{n+1} . Pour chaque coefficients a_k avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a p choix possibles et il y a $n + 1$ coefficients a_0, \dots, a_n , on a donc

$$P(Z = 2n + 1) = \frac{p^{n+1}}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p^n}.$$

- (d) Soit $E = \{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \text{ tel que } a_k = a_{2n-k}\}$. Si $k \in E$ et $k \neq 2n - k$, ce qui signifie $k \neq n$, alors k et $2n - k$ sont deux éléments distincts appartenant à E . Ainsi, E s'écrit comme la réunion disjointe

$$E = \{n\} \cup (E \cap \llbracket 0, n - 1 \rrbracket) \cup (E \cup \llbracket n + 1, 2n \rrbracket)$$

donc

$$\text{card}(E) = 1 + \text{card}(E \cap \llbracket 0, n - 1 \rrbracket) + \text{card}(E \cup \llbracket n + 1, 2n \rrbracket)$$

L'application $k \mapsto 2n - k$ est une bijection de $(E \cap \llbracket 0, n - 1 \rrbracket)$ sur $(E \cup \llbracket n + 1, 2n \rrbracket)$ donc

$$\text{card}(E \cap \llbracket 0, n - 1 \rrbracket) = \text{card}(E \cup \llbracket n + 1, 2n \rrbracket),$$

ce qui implique que $\text{card } E = 1 + 2 \text{card}(E \cap \llbracket 0, n - 1 \rrbracket)$ est un entier impair.

L'évènement $(Z = 2j + 1)$ se réalise si et seulement si il existe j entiers $k' \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tels que $a_{k'} = a_{2n-k'}$. On choisit donc j entiers dans l'intervalle $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, qui est de cardinal n , ce qui nous donne $\binom{n}{j}$ choix pour les entiers k' . On a p choix pour chaque coefficient a_k , $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ (qu'ils soient des incidences ou non), ce qui nous donne p^n choix pour tous coefficients a_0, \dots, a_{n-1} puisqu'ils sont indépendants les uns des autres. Les j coefficients $a_{2n-k'}$ appartenant à $\{a_{n+1}, \dots, a_{2n}\}$ sont fixés par la condition $a_{k'} = a_{2n-k'}$. Pour chaque coefficient a_{2n-k} restant de l'ensemble $\{a_{n+1}, \dots, a_{2n}\}$, on a $p - 1$ choix possible car il ne peut pas prendre la valeur a_k . Il existe $n - j$ tels autres coefficients, et pour chacun d'entre eux, on a p choix possible, ce qui nous donne p^{n-j} choix pour l'ensemble des ces coefficients et le coefficient a_n a le droit de n'importe quelle valeur dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Par conséquent, on a

$$P(Z = 2j + 1) = \frac{\binom{n}{j} p^n \times (p - 1)^{n-j} p}{p^{2n+1}} = \binom{n}{j} \frac{(p - 1)^{n-j}}{p^n}.$$

- (e) $Z = 2j + 1$ avec $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ si et seulement si $Y = \frac{Z - 1}{2} = j$. On en déduit que $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et l'on a la formule

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(Y = j) &= P(Z = 2j + 1) = \binom{n}{j} \frac{(p - 1)^{n-j}}{p^n} \\ &= \binom{n}{j} \frac{1}{p^j} \times \frac{(p - 1)^{n-j}}{p^{n-j}} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(\frac{p - 1}{p}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-j}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que Y suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{p})$. Son espérance et sa variance sont donc

$$E(Y) = n \times \frac{1}{p} = \frac{n}{p} \text{ et } V(Y) = n \times \left(\frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{n(p - 1)}{p^2}.$$

On en déduit que

$$E(Z) = E(2Y + 1) = 2E(Y) + 1 = \frac{2n + p}{p} \text{ et } V(Z) = V(2Y + 1) = 4V(Y) = \frac{4n(p - 1)}{p^2}.$$