EDHEC 2004 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) a. X possède une espérance et une variance qui ont pour valeur commune λ.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}\cdot$

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ P(|X - \lambda)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\lambda}{\varepsilon^2}\cdot$

λ étant strictement positif nous pouvons écrire que $P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{\lambda}{\lambda^2}\cdot$

Une simplification évidente donne alors :

$$\boxed{P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot}$$

b. $\{|X - \lambda| \geqslant \lambda\} = \{X - \lambda \geqslant \lambda\} \cup \{X - \lambda \leqslant -\lambda\} = \{X \geqslant 2\,\lambda\} \cup \{X \leqslant 0\}$. Alors $\{X \geqslant 2\,\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}$.

La croissance de P fournit $P(X \geqslant 2\,\lambda) \leqslant P(|X - \lambda| \geqslant \lambda)$ et a) donne alors :

$$\boxed{P(X \geqslant 2\,\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot}$$

2) a. Montrons l'inégalité de Markov. Soit a un réel strictement positif.

Version 1 Notons S l'événement $\{Y \geqslant a\}$ et $\mathbb{1}_S$ son indicatrice. $\mathbb{1}_S$ possède une espérance qui vaut $P(S)$.

Montrer que $P(Y \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(Y)}{a}$ revient à montrer que $a\,P(S) \leqslant E(Y)$ ou que $a\,E(\mathbb{1}_S) \leqslant E(Y)$.

Cela revient encore à montrer que : $E(Y - a\,\mathbb{1}_S) \geqslant 0$.

Montrons en fait que $Y - a\,\mathbb{1}_S$ ne prend que des valeurs positives ou nulles. Soit ω un élément de Ω.

Si ω appartient à S : $a \leqslant Y(\omega)$ donc $0 \leqslant Y(\omega) - a = Y(\omega) - a\,\mathbb{1}_S(\omega) = (Y - a\,\mathbb{1}_S)(\omega)$; $(Y - a\,\mathbb{1}_S)(\omega) \geqslant 0$.

Si ω n'appartient pas à S : $(Y - a\,\mathbb{1}_S)(\omega) = Y(\omega) - a\,\mathbb{1}_S(\omega) = Y(\omega) \geqslant 0$ (Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$).

Ainsi $\forall \omega \in \Omega,\ (Y - a\,\mathbb{1}_S)(\omega) \geqslant 0$. $Y - a\,\mathbb{1}_S$ ne prend que des valeurs positives donc son espérance est positive.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Version 2 Posons $I = \{i \in \mathbb{N} \mid y_i \geqslant a\}$.

Si I est vide $P(Y \geqslant a) = 0$ et l'inégalité est alors vérifiée car $\dfrac{E(Y)}{a}$ est un réel positif ou nul.

Supposons I non vide.

$\{Y \geqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \geqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid \ \exists i \in \mathbb{N},\ Y(\omega) = y_i \text{ et } y_i \geqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I,\ Y(\omega) = y_i\}$.

Alors $\{Y \geqslant a\} = \displaystyle\bigcup_{i \in I} \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_i\} = \bigcup_{i \in I} \{Y = y_i\}$.

Alors $P(Y \geqslant a) = \displaystyle\sum_{i \in I} P(Y = y_i)$ car la réunion précédente est constituée d'une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints.

$E(Y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} y_i\, P(Y = y_i) \geqslant \sum_{i \in I} y_i\, P(Y = y_i)$ car $I \subset \mathbb{N}$ et $\forall i \in \mathbb{N},\ y_i\, P(Y = y_i) \geqslant 0$.

Observons que $\forall i \in I,\ y_i \geqslant a$ et $P(Y = y_i) \geqslant 0$. Donc $\forall i \in I,\ y_i\, P(Y = y_i) \geqslant a\, P(Y = y_i)$.

Alors $E(Y) \geqslant \displaystyle\sum_{i \in I} y_i\, P(Y = y_i) \geqslant \sum_{i \in I} a\, P(Y = y_i) = a \sum_{i \in I} P(Y = y_i) = a\, P(Y \geqslant a)$.

En divisant par a qui est stritement positif il vient : $\dfrac{E(Y)}{a} \geqslant P(Y \geqslant a)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a \text{ strictement positif} : P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a} \cdot}$$

b. Soit (a, x) un élément de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^+$. Soit ω un élément de Ω tel que $Z(\omega) \geqslant a$.

$Z(\omega) + x \geqslant a + x > 0$ et ainsi $\big(Z(\omega) + x\big)^2 \geqslant (a + x)^2$ ou $\big(Z + x\big)^2(\omega) \geqslant (a + x)^2$.

L'événement $\{Z \geqslant a\}$ est donc contenu dans l'événement $\{(Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\}$.

Alors la croissance de P donne : $P(Z \geqslant a) \leqslant P\big((Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\big)$.

$$\boxed{\forall (a, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}^+,\ P(Z \geqslant a) \leqslant P\big((Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\big).}$$

c. Soit (a, x) un élément de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^+$.

$(Z + x)^2$ est une variable aléatoire discrète à valeur positives.

Montrons que $(Z + x)^2$ possède une espérance.

Z possède une variance donc $E(Z)$ et $E(Z^2)$ existent. Alors $(Z+x)^2 = Z^2 + 2\,x\,Z + x^2$ possède une espérance égale à $E(Z^2) + 2\,x\,E(Z) + x^2$.

$E(Z) = 0$ et $E(Z^2) = E(Z^2) - \big(E(Z)\big)^2 = V(Z) = \sigma^2$ donc $E\big((Z+x)^2\big) = E(Z^2) + 2\,x\,E(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2$.

En appliquant 2) a. à $(Z + x)^2$ avec le réel strictement positif $(a + x)^2$, on obtient :

$P\big((Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\big) \leqslant \dfrac{E\big((Z + x)^2\big)}{(a + x)^2} = \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2} \cdot$

Alors $P(Z \geqslant a) \leqslant P\big((Z + x)^2 \geqslant (a + x)^2\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2} \cdot$

$$\boxed{\forall (a, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}^+,\ P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2} \cdot}$$

d. Soit a un réel strictement positif.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$ et notons que $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(Z \geqslant a) \leqslant f(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \dfrac{2x\,(a+x)^2 - (\sigma^2 + x^2)\ 2(a+x)}{(a+x)^4} = \dfrac{2(a+x)}{(a+x)^4}\Big(x\,a + x^2 - \sigma^2 - x^2\Big) = \dfrac{2\,a}{(a+x)^3}\Big(x - \dfrac{\sigma^2}{a}\Big)\cdot$

f' est négative sur $\left[0, \dfrac{\sigma^2}{a}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$ donc f est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\sigma^2}{a}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$. Alors f possède un minimum en $x_0 = \dfrac{\sigma^2}{a}\cdot$

Hum, un minimum pour majorer $P(Z \geqslant a)$? ? Oui, on ne pouvait espérer mieux ! Chez les majorants c'est le plus petit qui est le meilleur !

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(Z \geqslant a) \leqslant f(x)$ en particulier $P(Z \geqslant a) \leqslant f(x_0)$.

$f(x_0) = \dfrac{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}{\left(a + \frac{\sigma^2}{a}\right)^2} = \dfrac{\frac{\sigma^2\,a^2 + \sigma^4}{a^2}}{\frac{(a+\sigma^2)^2}{a^2}} = \dfrac{\sigma^2\,(a^2+\sigma^2)}{(a^2+\sigma^2)^2} = \dfrac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}\cdot$ Alors $P(Z \geqslant a) \leqslant f(x_0) = \dfrac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2} = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a \text{ strictement positif} : P(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}\cdot}$$

e. Posons ici $Z = X - \lambda = X - E(X)$. Z est une variable discrète d'espérance nulle et dont la variance est celle de X. Ainsi $V(Z) = \lambda = \left(\sqrt{\lambda}\right)^2$.

En appliquant ce qui précède à $Z = X - \lambda$ avec $a = \lambda$ on obtient : $P(Z \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{\left(\sqrt{\lambda}\right)^2}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^2 + \lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda+1}\cdot$

Or $P(Z \geqslant \lambda) = P(X - \lambda \geqslant \lambda) = P(X \geqslant 2\,\lambda)$. Finalement :

$$\boxed{P(X \geqslant 2\,\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}\cdot}$$

3) a. Soit t un réel. $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k)\,t^k = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}\,t^k = \dfrac{(\lambda\,t)^k}{k!}\,e^{-\lambda}$.

La série de terme général $\dfrac{(\lambda\,t)^k}{k!}$ étant convergente, il en est de même de la série de terme général $P(X = k)\,t^k$. Ainsi $G_X(t)$ existe.

De plus $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\,t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{(\lambda\,t)^k}{k!}\,e^{-\lambda}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda\,t)^k}{k!} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda\,t} = e^{\lambda\,(t-1)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t,\ G_X(t) \text{ existe et vaut } e^{\lambda\,(t-1)}.}$$

b. Version 1 Soit t un élément de $[1, +\infty[$ et a un un élément de $]0, +\infty[$.

Observons que l'événement $\{X \geqslant a\}$ est contenu dans l'événement $\{t^X \geqslant t^a\}$ ($z \to t^z$ est croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $t \geqslant 1$). Ainsi $P(X \geqslant a) \leqslant P(t^X \geqslant t^a)$.

t^X est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives.

La série de terme général $t^k\, P(X=k)$ est convergente, d'après a), et même absolument convergente car à termes positifs.

Alors le théorème de transfert permet de dire que t^X possède une espérance qui vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\, P(X=k)$ donc $G_X(t)$.

En appliquant Q2 a) à la variable t^X avec le réel strictement positif t^a il vient :

$P(X \geqslant a) \leqslant P(t^X \geqslant t^a) \leqslant \dfrac{E(t^X)}{t^a} = \dfrac{G_X(t)}{t^a}\cdot$

$$\boxed{\forall t \in [1,+\infty[,\ \forall a \in]0,+\infty[,\ P(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}\cdot}$$

Version 2 Soit t un élément de $[1,+\infty[$ et a un un élément de $]0,+\infty[$. Notons γ_a le plus petit élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à a (γ_a vaut a si a est entier et $[a]+1$ si a n'est pas entier).

$P(X \geqslant a) = \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X=k)$. Comme t appartient à $[1,+\infty[$, si k est un élément de $[\![\gamma_a,+\infty[\![$, $P(X=k) \geqslant 0$ et $1 \leqslant \dfrac{t^k}{t^a}$; alors $P(X=k) \leqslant P(X=k)\, \dfrac{t^k}{t^a}\cdot$

Ceci permet d'écrire : $P(X \geqslant a) = \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} \left(P(X=k)\, \dfrac{t^k}{t^a}\right) = \dfrac{1}{t^a} \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X=k)\, t^k$ car la série de terme général $P(X=k)\, t^k$ converge.

$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k)\, t^k \geqslant 0$ donc $\dfrac{1}{t^a} \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X=k)\, t^k \leqslant \dfrac{1}{t^a} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k = \dfrac{G_X(t)}{t^a}\cdot$

Le tout redonne sans difficulté : $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}\cdot$

c. g est continue et sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[,\ g'(t) = \dfrac{t^2\, e^{t-1} - 2t\, e^{t-1}}{t^4} = \dfrac{(t-2)\, e^{t-1}}{t^3}\cdot$

g' est négative sur $[0,2]$ et positive sur $[2,+\infty[$. Donc g est décroissante sur $[0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$. Alors g possède un minimum en 2 qui vaut $g(2) = \dfrac{e}{4}\cdot$

$$\boxed{g \text{ possède un minimum sur } [0,+\infty[\text{ qui vaut } \frac{e}{4}\cdot}$$

d. D'après b), $\forall t \in [1,+\infty[,\ P(X \geqslant 2\,\lambda) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^{2\,\lambda}} = \dfrac{e^{\lambda\,(t-1)}}{t^{2\,\lambda}} = \big(g(t)\big)^{\lambda}$.

En particulier $P(X \geqslant 2\,\lambda) \leqslant \big(g(2)\big)^{\lambda} = \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}\cdot$

$$\boxed{P(X \geqslant 2\,\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}\cdot}$$

4) Par croissance comparée $\lim_{\lambda \to +\infty} \left((\lambda+1)\, \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}\right) = 0$ car $\left|\dfrac{e}{4}\right| < 1$.

Alors, il existe un réel strictement positif λ_0 tel que pour tout réel λ strictement supérieur à λ_0 on ait :

$(\lambda+1)\, \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda} < 1$ c'est à dire $\left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda} < \dfrac{1}{\lambda+1}\cdot$

$\boxed{\text{La dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question 2 e) dès que } \lambda \text{ prend des valeurs assez grandes.}}$

EXERCICE 2

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ g_x(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\cdot$ g_x est continue sur $[1,+\infty[$. Envisageons deux cas.

• Supposons x strictement positif.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ 1+t+t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant g_x(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{t^{x+1}}\cdot$

Comme $x+1 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ converge. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$.

• Supposons x négatif ou nul.

Comme $x+1 \leqslant 1$, $\forall t \in [1,+\infty[,\ t^{x+1} \leqslant t$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 < 1+t+t^{x+1} \leqslant 1+t+t \leqslant t+t+t = 3\,t$.

Alors $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{3\,t} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} = g_x(t)$.

La divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3\,t}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$.

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si x est strictement positif.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est }]0,+\infty[.}$$

Remarque *On pouvait également obtenir le résultat en montrant que :*

$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\,t} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{t^{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2) Montrons que f est croissante en utilisant la définition.

Soient deux éléments x et y de $]0,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Montrons que $f(y) \leqslant f(x)$.

Soit t un élément de $[1,+\infty[$. $\ln t \geqslant 0$ et $x \leqslant y$ donc $(x+1)\,\ln t \leqslant (y+1)\,\ln t$.

Alors $t^{x+1} = e^{(x+1)\,\ln t} \leqslant e^{(y+1)\,\ln t} = t^{y+1}$ donc $0 < 1+t+t^{x+1} \leqslant 1+t+t^{y+1}$.

Ainsi $\dfrac{1}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$.

Finalement : $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$.

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$, c'est à dire : $f(y) \leqslant f(x)$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

3) a. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ h_x(t) = \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$. h_x est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,(1+t^x) = t + t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant h_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^{x+1}}$.

Comme $x+1 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ converge. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de }]0,+\infty[, \text{ la quantité } g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} \text{ existe.}}$$

Remarque *Notons que si x appartient à $]-\infty,0]$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)}$ diverge.*

En effet, si x appartient à $]-\infty,0]$, $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{2\,t} \leqslant \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge.

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x} = \dfrac{1+t^x-t^x}{t\,(1+t^x)} = \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1}{t\,(1+t^x)}.}$$

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Soit A un élément de $[1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln|t| - \frac{1}{x}\ln|1+t^x|\right]_1^A = \frac{1}{x}\left[x\ln t - \ln(1+t^x)\right]_1^A = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t^x}{1+t^x}\right]_1^A.$$

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \frac{1}{x}\left(\ln\frac{A^x}{1+A^x} - \ln\frac{1}{2}\right) \quad (**).$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A^x}{1+A^x} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{A^x}} = 1$ Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln\frac{A^x}{1+A^x} = 0$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (**) il vient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = -\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \frac{\ln 2}{x}.}$$

c. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ 1+t+t^{x+1} \geqslant t+t^{x+1} = t\,(1+t^x) > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$.

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient : $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x}\cdot}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$, l'encadrement précédent donne :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4) a. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$\dfrac{\ln 2}{x} - f(x) = g(x) - f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t\,(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\right) \mathrm{d}t\cdot$

$\dfrac{\ln 2}{x} - f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\cdot$

Soit t un élément de $[1,+\infty[$.

$t \geqslant t > 0$, $1+t^x \geqslant t^x > 0$ et $1+t+t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1}) \geqslant t\,t^x\,t^{x+1} = t^{2\,x+2} > 0$.

Alors $\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1}) \geqslant t^{2\,x+2} > 0$.

Ainsi $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})} \leqslant \dfrac{1}{t^{2x+2}}\cdot$ (***)

Observons que $2x+2 > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}}$ converge. De plus :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{(2x+1)\,t^{2x+1}}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{(2x+1)\,A^{2x+1}} + \frac{1}{2x+1}\right) = \frac{1}{2x+1}\cdot$

Alors en intégrant l'encadrement (***) (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient :

$0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})} \leqslant \frac{1}{2x+1}\cdot$ Ce qui donne $0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}\cdot}$$

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}\cdot$ Donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \ln 2 - x\,f(x) \leqslant \dfrac{x}{2x+1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x}{2x+1} = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \big(x\,f(x)\big) = \ln 2$.

Comme $\ln 2$ n'est pas nul, $x\,f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln 2$ et donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x}\cdot$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\ln 2}{x} = +\infty$ donne alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty.}$$

5) f est décroissante sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Je vous laisse le tableau...

EXERCICE 3

1) a. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de X et de Y.

X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes de densité f.

Alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

Soit x un réel. Par définition de f, $h(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\, \mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = x - t$ donne alors $h(x) = -\displaystyle\int_x^{x-1} f(u)\, \mathrm{d}u = \int_{x-1}^{x} f(u)\, \mathrm{d}u$.

• Si x est élément de $]-\infty, 0[$, $[x-1, x]$ est contenu dans $]-\infty, 0[$ et $h(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} 0\, \mathrm{d}u = 0$.

• Si x est élément de $]2, +\infty[$, $[x-1, x]$ est contenu dans $]1, +\infty[$ et $h(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} 0\, \mathrm{d}u = 0$.

• Si x est élément de $[0, 1[$ alors $x - 1 < 0 \leqslant x < 1$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^x 1\, \mathrm{d}u = x$.

• Si x est élément de $[1, 2]$ alors $0 \leqslant x - 1 \leqslant 1 \leqslant x$ et $h(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{1} 1\, \mathrm{d}u = 1 - (x-1) = 2 - x$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } Z = X + Y.}$$

b. Soit x un élément de $]0, 1[$. Notons que $0 < 1 - x < 1 < 1 + x < 2$.

• $P(Z > 1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t = \int_1^2 (2-t)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$.

• $P(1 - x < Z \leqslant 1 + x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} h(t)\, \mathrm{d}t = \int_{1-x}^{1} t\, \mathrm{d}t + \int_1^{1+x} (2-t)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{1-x}^{1} + \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^{1+x}$.

$P(1 - x < Z \leqslant 1 + x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(1-x)^2}{2} - \dfrac{(1-x)^2}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 - (1-x)^2$.

• $P\big(\{Z > 1\} \cap \{1 - x < Z \leqslant 1 + x\}\big) = P(1 < Z \leqslant 1 + x) = \displaystyle\int_1^{1+x} (2-t)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}$.

Alors $P\big(\{Z > 1\} \cap \{1 - x < Z \leqslant 1 + x\}\big) = \dfrac{1}{2}\big(1 - (1-x)^2\big) = P(Z > 1)\, P(1 - x < Z \leqslant 1 + x)$.

$$\boxed{\text{Les événements } \{Z > 1\} \text{ et } \{1 - x < X \leqslant 1 + x\} \text{ sont indépendants.}}$$

2) a. Cherchons la fonction de répartition F_T de $T = \mathrm{Max}(X, Y)$.

Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$.

Soit x un réel. $F_T(x) = P(T \leqslant x) = P\big(\operatorname{Max}(X,Y) \leqslant x\big) = P\big(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant x\}\big)$.

Les variables X et Y étant indépendantes il vient : $F_T(x) = P(X \leqslant x)\, P(Y \leqslant x) = F_X(x)\, F_Y(x) = \big(F_X(x)\big)^2$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$.

Comme $F_T(0) = 0$ on a $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_T(x) = 0$ et ainsi F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.

Comme $F_T(1) = 1$ on a $\forall x \in [1, +\infty[,\ F_T(x) = 1$ et ainsi F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

De plus $\forall x \in [0,1],\ F_T(x) = x^2$ donc F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Ce qui précède permet alors de dire que F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

Par conséquent :

$$\boxed{T \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[,\ F_T'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1[,\ F_T'(x) = 2\,x$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_T est une application positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F_T' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc f_T est une densité de probabilité de T.

$$\boxed{\text{La fonction } f_T \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de probabilité de } T.}$$

b. Comme f_T est nulle sur $]-\infty, 0[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t$ existe et vaut 0. Il en est de même pour $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t$.

$t \to t\, f_T$ est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t$ existe.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t$.

Alors T possède une espérance qui est égale à $\displaystyle\int_0^1 t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t$. De plus $\displaystyle\int_0^1 t\, f_T(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 2\, t^2\, \mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot$

$$\boxed{T \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{2}{3}\cdot}$$

c. Soient a et b deux réels.

Supposons $a \leqslant b$. $\operatorname{Max}(a,b) = b$ et $|a - b| = b - a$.

Donc $2\ \operatorname{Max}(a,b) = 2\,b = a + b + (b - a) = a + b + |a - b|$. $|a - b| = 2\ \operatorname{Max}(a,b) - (a + b)$.

On montre de la même manière cette dernière égalité lorsque $a > b$.

Ainsi $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |a-b| = 2\ \mathrm{Max}(a,b) - (a+b)$.

Remarque *On observera et on retiendra que* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Max}(a,b) = \dfrac{1}{2}\Big(a+b+|a-b|\Big)$.

De même : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Min}(a,b) = \dfrac{1}{2}\Big(a+b-|a-b|\Big)$.

En appliquant ce qui précède on obtient :

$\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) = |X(\omega) - Y(\omega)| = 2\ \mathrm{Max}\big(X(\omega), Y(\omega)\big) - (X(\omega) + Y(\omega)) = \Big(2\ \mathrm{Max}(X,Y) - (X+Y)\Big)(\omega)$.

Alors $\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) = \big(2\,T - Z\big)(\omega)$ et ainsi :

$$\boxed{U = 2\,T - Z.}$$

$Z = X + Y$. X et Y possèdent une espérance qui vaut $\dfrac{1}{2}$. Alors Z possède une espérance qui vaut 1.

Rappelons que $E(T)$ existe et vaut $\dfrac{2}{3}$. Alors $U = 2\,T - Z$ possède une espérance égale à $2\,\dfrac{2}{3} - 1$ c'est à dire $\dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{L'espérance de } U \text{ existe et vaut } \dfrac{1}{3}.}$$

PROBLÈME

Partie 1

1) • Par définition N est un sous-ensemble de E_2.

• 0_{E_2} s'annule en 0 et 1 donc est un élément de N ; N n'est pas vide.

• Soient f et g deux éléments de N et soit λ un réel.

$f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ donc $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$ et $(\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$.

$\lambda f + g$ est un élément de N. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{N \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_2.}$$

2) Soient f et g deux éléments de N et soit λ un réel.

$u(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' = \lambda f'' + g'' = \lambda u(f) + u(g)$; u est une application linéaire de N dans E_0.

Soit f un élément de $\operatorname{Ker} u$. Alors f'' est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$ donc f' est constante sur $[0, 1]$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, 1],\ f'(x) = \alpha$; donc $\exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, 1],\ f(x) = \alpha\, x + \beta$.

Comme $f(0) = f(1) = 0$, $\beta = \alpha + \beta = 0$. Ceci donne $\alpha = \beta = 0$ et $u = 0_N$.

Le noyau de u est réduit à $\{0_N\}$ donc u est injective.

$$\boxed{u \text{ est une application linéaire injective.}}$$

3) a. Montrons que G est dérivable sur $[0, 1]$. Soit x un élément de $[0, 1]$.

$G(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x (x - t)\, g(t)\, \mathrm{d}t + \int_x^1 (t - x)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right).$

$G(x) = \dfrac{1}{2}\left(x \displaystyle\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \int_x^1 t\, g(t)\, \mathrm{d}t - x \int_x^1 g(t)\, \mathrm{d}t\right).$

$G(x) = \dfrac{1}{2}\left(x \displaystyle\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t - \int_1^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t + x \int_1^x g(t)\, \mathrm{d}t\right).$

g est continue sur $[0, 1]$ donc $x \to \displaystyle\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$ (resp. $x \to \displaystyle\int_1^x g(t)\, \mathrm{d}t$) est dérivable sur $[0, 1]$ car c'est la primitive de g sur $[0, 1]$ qui prend la valeur 0 en 0 (resp. 1).

$t \to t\, g(t)$ est continue sur $[0, 1]$ donc $x \to \displaystyle\int_0^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t$ (resp. $x \to \displaystyle\int_1^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t$) est dérivable sur $[0, 1]$ car c'est la primitive de $t \to t\, g(t)$ sur $[0, 1]$ qui prend la valeur 0 en 0 (resp. 1).

Notons que $x \to x$ est également dérivable sur $[0, 1]$. Ce qui précède permet alors de dire que G est dérivable sur $[0, 1]$ et que :

$\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + x\,g(x) - x\,g(x) - x\,g(x) + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t + x\,g(x)\right).$

$\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ ou $\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right).$

Observons que G' est sur $[0,1]$ la somme de deux primitives de g. Donc G' est dérivable sur $[0,1]$ ce qui suffit très largement pour dire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi

$$\boxed{G \text{ est élément de } E_1 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right).}$$

b. Nous venons de voir que G' est dérivable sur $[0,1]$.

De plus $\forall x \in [0,1],\ G''(x) = \dfrac{1}{2}\Big(g(x) + g(x)\Big)$ car $\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$

Finalement $G'' = g$ et ainsi G'' est continue sur $[0,1]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Résumons :

$$\boxed{G \text{ est élément de } E_2 \text{ et } G'' = g.}$$

c. G et $x \to ax + b$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

Ainsi $H \in N \iff H(0) = H(1) = 0 \iff G(0) + b = G(1) + a + b = 0 \iff a = G(0) - G(1)$ et $b = -G(0)$.

Notons que $G(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t$, $G(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(0) - G(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2\,t-1)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{H : x \to G(x) + ax + b \text{ appartient à } N \text{ si et seulement si } a = \frac{1}{2}\int_0^1 (2\,t-1)\,g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b = -\frac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Remarque *Dans la suite nous supposerons que* $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2\,t-1)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $b = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *donc que* H *appartient à* N*.*

Ainsi $\forall x \in [0,1],\ H(x) = G(x) + ax + b = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$

d. H appartient à N et $u(H) = H'' = G'' = g$. $\boxed{u(H) = g.}$

Nous avons donc montré que pour tout élément g de E_0, il existe un élément H de N tel que $u(H) = g$. Ainsi :

$$\boxed{u \text{ est une application surjective de } N \text{ sur } E_0.}$$

e. De 2) et 3 d) il résulte que u est une application linéaire bijective de N sur E_0.

$$\boxed{u \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de } N \text{ sur } E_0.}$$

4) Soit g un élément de E_0. La question 3) nous a montré que l'antécédent de g par u dans N est la fonction H définie par $\forall x \in [0,1],\ H(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Alors

$$\boxed{\forall g \in E_0,\ \forall x \in [0,1],\ u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Partie 2

1) • $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est de toute évidence une famille d'éléments de N_{n+2}.

• Soit P un élément de P_{n+2}.

$P \in N_{n+2} \Longleftrightarrow P(0) = P(1) = 0 \Longleftrightarrow \exists Q \in P_n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x(x-1)\,Q(x)$

$P \in N_{n+2} \Longleftrightarrow \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x(x-1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k.$

$P \in N_{n+2} \Longleftrightarrow \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{k+1}(x-1).$

$P \in N_{n+2} \Longleftrightarrow \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n).$

$(f_0, f_1 \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de N_{n+2}.

• Montrons que cette famille est libre.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k = 0_{N_{n+2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k(x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, x(x-1)\, e_k(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{0,1\},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\ e_k(x) = 0.$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, e_k$ est alors un élément de P_n admettant une infinité de zéros, c'est donc la fonction nulle de P_n.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, e_k = 0_{P_n}$. Comme $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est libre : $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{C} = (f_0, f_1, \ldots, f_n) \text{ est une base de } N_{n+2}.}$$

2) a. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k''(x) = (k+2)(k+1)\, x^k - (k+1)k\, x^{k-1}$.

Ainsi $v(f_k) = (k+2)(k+1)\, e_k - (k+1)k\, e_{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = x^2 - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0''(x) = 2$. Ainsi $v(f_0) = 2\, e_0$.

$$\boxed{v(f_0) = 2\, e_0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ v(f_k) = (k+2)(k+1)\, e_k - (k+1)k\, e_{k-1}.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La matrice de } v \text{ relativement aux bases } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} d_0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -d_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \\ \text{avec } \forall k \in [\![0, n]\!],\ d_k = (k+2)(k+1). \end{array}}$$

b. La matrice A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ sans zéro sur sa diagonale ; elle est donc inversible.

Ainsi v est une application linéaire bijective de N_{n+2} sur P_n.

$$\boxed{v \text{ est un isomorphisme de } N_{n+2} \text{ sur } P_n.}$$

c. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$ et x un réel.

$$\sum_{j=0}^{k} f_j(x) = \sum_{j=0}^{k} (x^{j+2} - x^{j+1}) = \sum_{j=0}^{k} x^{j+2} - \sum_{j=0}^{k} x^{j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} x^{j+1} - \sum_{j=0}^{k} x^{j+1} = x^{k+2} - x.$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{k} f_j(x) = x^{k+2} - x.}$$

d. Le résultat de la question P1 2 c) peut s'appliquer pour déterminer v^{-1} dans la mesure où :

- la restriction d'un élément de N_{n+2} (resp. P_n) à $[0,1]$ est un élément de N (resp E_0) ;
- deux fonctions polynômiales réelles qui coïncident sur $[0,1]$ sont égales.

Déterminons A^{-1} en utilisant le résultat de la question 2) c. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j(x) = x^{k+2} - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j\right)''(x) = (k+2)(k+1)\,x^k$.

Par conséquent : $v\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j\right) = (k+2)(k+1)\,e_k$.

Ceci qui donne encore $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j = v^{-1}\big((k+2)(k+1)\,e_k\big) = (k+2)(k+1)\,v^{-1}(e_k)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ v^{-1}(e_k) = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \sum_{j=0}^{k} f_j}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\times 1} & \frac{1}{3\times 2} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ 0 & \frac{1}{3\times 2} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{pmatrix}}$$

Remarque Un calcul assez simple donne :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in [0,1],\ \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|\,t^k\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,t^k\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big(x^{k+2} - x\Big).$$

Il permet de retouver le résultat précédent en utilisant la question 4 de la partie 1.

e. Supposons $n = 2$. Alors $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} 2x - 2y = x' \\ 6y - 6z = y' \\ 12z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{12}\,z' \\ y = \frac{1}{6}\,y' + z = \frac{1}{6}\,y' + \frac{1}{12}\,z' \\ x = \frac{1}{2}\,x' + y = \frac{1}{2}\,x' + \frac{1}{6}\,y' + \frac{1}{12}\,z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\,x' + \frac{1}{6}\,y' + \frac{1}{12}\,z' \\ y = \frac{1}{6}\,y' + \frac{1}{12}\,z' \\ z = \frac{1}{12}\,z' \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Alors } A \text{ est invresible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.}$$

Remarque *On pouvait se contenter de vérifier que :* $A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = I_3 ...$

3) a. Soit φ l'application qui à tout élément P de P_n associe l'application $\varphi(P)$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = (x^2 - x)\, P(x)$.

φ est clairement une application linéaire de P_n dans N_{n+2}. Remarquons alors que $w = v \circ \varphi$.

w est alors la composée d'une application linéaire de P_n dans N_{n+2} avec une application linéaire de N_{n+2} dans P_n. Alors w est une application linéaire de P_n dans P_n.

$$\boxed{w \text{ est un endomorphisme de } P_n.}$$

b. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - x)\, e_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ w(e_k)(x) = (k+2)(k+1)\, x^k - (k+1)k\, x^{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ w(e_k)(x) = \Big((k+2)(k+1)\, e_k - (k+1)k\, e_{k-1}\Big)(x)$. Alors $w(e_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)k\, e_{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - x)\, e_0(x) = x^2 - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ w(e_0)(x) = 2 = 2\, e_0(x)$. $w(e_0) = 2\, e_0$.

$$\boxed{w(e_0) = 2\, e_0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ w(e_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)k\, e_{k-1}.}$$

c. $\boxed{\text{La matrice de } w \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est clairement } A\,!}$

d. La matrice A de w dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure , donc l'ensemble des valeurs propres de w et de A est l'ensemble des éléments de la diagonale de A.

Alors $\operatorname{Sp} w = \operatorname{Sp} A = \{(k+2)(k+1); k \in [\![0, n]\!]\}$. Posons $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = (k+2)(k+1)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+3)(k+2) - (k+2)(k+1) = 2\,(k+2) > 0$. Alors $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

w est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$ qui admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes donc

$$\boxed{w \text{ est diagonalisable.}}$$

Nous avons déjà vu que A est inversible ainsi w est un endomorphisme bijectif de P_n.

$$\boxed{w \text{ est un automorphisme de } P_n.}$$

e. $n = 2$. La matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de w et de A sont : 2, 6 et 12. Les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Notons que $w(e_0) = 2\,e_0$ donc :

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } w \text{ associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par } e_0.}$$

Soit $P = x\,e_0 + y\,e_1 + z\,e_2$ un élément de P_2.

$$w(P) = 6\,P \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 6\,x \\ 6y - 6z = 6\,y \\ 12z = 6\,z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2\,x \\ z = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } w \text{ associé à la valeur propre 6 est la droite vectorielle engendrée par } e_0 - 2\,e_1.}$$

$$w(P) = 12\,P \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 12\,x \\ 6y - 6z = 12\,y \\ 12z = 12\,z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -5\,x \\ z = -y = 5\,x \end{cases} \quad ;$$

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } w \text{ associé à la valeur propre 12 est la droite vectorielle engendrée par } e_0 - 5\,e_1 + 5\,e_2.}$$
