EDHEC 2006 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1 a) $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\,id)-(f-\lambda_2\,id)\Big)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(f-\lambda_1\,id-f+\lambda_2\,id\Big)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((\lambda_2-\lambda_1)\,id\Big)=id.$

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\,id)-(f-\lambda_2\,id)\Big)=id.}$$

b) Montrons que $\mathbb{C}^m$ est somme directe de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)$ et de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$.

• Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)\cap\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$. $f(x)=\lambda_1\,x$ et $f(x)=\lambda_2\,x$.

Alors $(\lambda_2-\lambda_1)\,x=\lambda_2\,x-\lambda_1\,x=f(x)-f(x)=0_{\mathbb{C}^m}$. Comme λ_1 et λ_2 sont distincts, $\lambda_2-\lambda_1$ n'est pas nul et ainsi x est nul. Ceci achève de montrer que $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)\cap\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)=\{0_{\mathbb{C}^m}\}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$ sont en somme directe.

• $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^m$ donc $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)+\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$ est contenu dans $\mathbb{C}^m$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\mathbb{C}^m$. $x=id(x)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_1\,id)-(f-\lambda_2\,id)\Big)(x)$.

Ainsi $x=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(f-\lambda_2\,id)(x)+\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(f-\lambda_1\,id)(x)$.

Posons $x_1=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\,(f-\lambda_2\,id)\,(x)$ et $x_2=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\,(f-\lambda_1\,id)\,(x)$. On a $x=x_1+x_2$.

Montrons alors que $x_1\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)$ et $x_2\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$.

$(f-\lambda_1\,id)(x_1)=(f-\lambda_1\,id)\left(\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\,(f-\lambda_2\,id)\,(x)\right)=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\Big((f-\lambda_1\,id)\circ(f-\lambda_2\,id)\Big)(x).$

Donc $(f-\lambda_1\,id)(x_1)=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\,\theta(x)=0_{\mathbb{C}^m}$ et ainsi $x_1\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)$.

Observons que $\theta=(f-\lambda_1\,id)\circ(f-\lambda_2\,id)=f^2-\lambda_2\,f-\lambda_1\,f+\lambda_1\,\lambda_2\,id=f^2-\lambda_1\,f-\lambda_2\,f+\lambda_2\,\lambda_1\,id=(f-\lambda_2\,id)\circ(f-\lambda_1\,id)$. Par conséquent : $(f-\lambda_2\,id)\circ(f-\lambda_1\,id)=\theta$. Alors :

$(f-\lambda_2\,id)(x_2)=(f-\lambda_2\,id)\left(\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\,(f-\lambda_1\,id)\,(x)\right)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((f-\lambda_2\,id)\circ(f-\lambda_1\,id)\Big)(x).$

Donc $(f-\lambda_2\,id)(x_2)=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\,\theta(x)=0_{\mathbb{C}^m}$ et alors $x_2\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$.

Ainsi $x=x_1+x_2$, $x_1\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)$ et $x_2\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$. Donc $x\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)+\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$.

Ceci achève de montrer que $\mathbb{C}^m\subset\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\,id)+\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\,id)$.

Par conséquent $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) + \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$. Comme $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ sont en somme directe :

$$\boxed{\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id).}$$

c) $(f - \lambda_1\, id) \circ (f - \lambda_2\, id) = \theta$ donc $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ est un polynôme annulateur de f dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont λ_1 et λ_2. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les seules valeurs propres possibles de f. Autrement dit : $\mathrm{Sp}\, f \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Rappelons que λ_1 (resp. λ_2) est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$) n'est pas réduit au vecteur nul. Envisageons alors trois cas.

Cas 1 : f est distinct de $\lambda_1\, id$ et $\lambda_2\, id$.

Si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ est réduit au vecteur nul alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $f - \lambda_2\, id = \theta$ donc $f = \lambda_2\, id$ ce qui n'est pas.

Si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ est réduit au vecteur nul alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) = \mathbb{C}^m$ car $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$.

Ainsi $f - \lambda_1\, id = \theta$ donc $f = \lambda_1\, id$ ce qui n'est pas.

Donc $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$ ne sont pas réduits au vecteur nul. Alors λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de f. Mieux λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f.

Or $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, id)$, donc f est diagonalisable.

Cas 2 : f coïncide avec $\lambda_1\, id$. Alors f est diagonalisable et λ_1 est sa seule valeur propre.

Cas 3 : f coïncide avec $\lambda_2\, id$. Alors f est diagonalisable et λ_2 est sa seule valeur propre.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est distinct de } \lambda_1\, id \text{ et de } \lambda_2\, id \text{ alors } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les (seules) valeurs propres de } f.}$$

$$\boxed{\text{Si } f = \lambda_1\, id \text{ (resp. } f = \lambda_2\, id\text{) alors } \lambda_1 \text{ (resp. } \lambda_2\text{) est la seule valeur propre de } f.}$$

2) $(i\, I)^2 = i^2\, I = -I$!!

$$\boxed{A = i\, I \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^2 = -I.}$$

3 a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n+1}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^{2n+1}$ est A.

Posons $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - i\,I)(A + i\,I) = A^2 - (i\,I)^2 = A^2 - i^2\,I = A^2 + I = 0_{\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})}$ (car A et $i\,I$ commutent...).

Ainsi $(f - \lambda_1\,id) \circ (f - \lambda_2\,id) = \theta$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Q1, appliquée pour $m = 2n+1$, montre alors que f est diagonalisable.

A est alors diagonalisable en tant que matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

A est une matrice à coefficients réels donc A ne vaut ni $i\,I$ ni $-i\,I$. Donc f n'est ni $\lambda_1\,id$ ni $\lambda_2\,id$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont les (seules) valeurs propres de f. Alors i et $-i$ sont LES valeurs propres de A.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}) \text{ et } i \text{ et } -i \text{ sont ses valeurs propres.}}$$

b) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$. $X \in E_i \iff AX = i\,X \iff \overline{AX} = \overline{iX} \iff \overline{A}\,\overline{X} = -i\,\overline{X}$.

Or A appartient à $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ donc $\overline{A} = A$. Ainsi $X \in E_i \iff A\,\overline{X} = -i\,\overline{X} \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) : X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}.}$$

c) Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E_i.

u_1, u_2, ..., u_p sont des éléments de E_i donc d'après ce qui précède, $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille d'éléments de E_{-i}. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ un élément de $\mathbb{C}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\,\overline{u_k} = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})} = \overline{0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}} = \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\,\overline{u_k}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k\,\overline{u_k}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\,u_k$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\,u_k = 0_{\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})}$.

Comme la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre : $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \overline{\alpha_k} = 0$.

En conjuguant on obtient : $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \alpha_k = 0$. Ceci achève de montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i}.

$$\boxed{\text{Si } (u_1, u_2, \ldots, u_p) \text{ est une base de } E_i \text{ alors } (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p}) \text{ est une famille libre d'éléments de } E_{-i}.}$$

Soit p la dimension de E_i et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E_i.

$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre d'éléments de E_{-i} donc $\dim E_{-i} \geqslant p = \dim E_i$.

Bien évidemment on peut montrer de la même manière que $\dim E_i \geqslant \dim E_{-i}$ et ainsi obtenir l'égalité entre $\dim E_i$ et $\dim E_{-i}$.

Reprenons plutôt une base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de E_i et montrons que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une base de E_{-i}.

Il ne reste plus qu'à montrer que $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille génératrice de E_{-i}.

Soit u un élément de E_{-i}. $\overline{u}$ appartient E_i car $\overline{\overline{u}} = u$ appartient à E_{-i} !

Donc il existe un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\overline{u} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, u_k$.

En conjuguant on obtient $u = \overline{\overline{u}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \overline{\alpha_k}\, \overline{u_k}$.

Ainsi tout élément de E_{-i} est combinaison linéaire de la famille $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$.

Ceci achève de montrer que cette famille est une famille génératrice de E_{-i}.

Étant libre c'est une base de E_{-i}. Alors $\dim E_{-i} = p = \dim E_i$.

$$\boxed{\dim E_i = \dim E_{-i}.}$$

d) A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et i et $-i$ sont ses valeurs propres.

Ainsi $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i \oplus E_{-i}$. Alors $2n + 1 = \dim \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2\, \dim E_i$.

$2n + 1$ n'étant pas un multiple de deux un léger doute nous envahit...

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice de } \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \text{ dont le carré est } -I.}$$

EXERCICE 2

1 a) •• Posons $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

Montrons à l'aide d'une récurrence faible que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, u_n est défini et est un réel strictement positif.

• La propriété est vraie pour $n = 1$ car $u_1 = 1$.

• Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ et montrons la pour n.

Pour tout élément j de $[\![1, n-1]\!]$, u_j est défini et est un réel strictement positif.

Donc $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$ est défini et est un réel strictement positif. Ceci achève la récurrence.

Ainsi en posant : $u_1 = 1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$, on définit une suite de réels strictement positifs.

•• Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une seconde suite de réels strictement positifs telle que $v_1 = 1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ v_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} v_j$.

Montrons que cette suite coïncide avec la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Montrons pour ce faire, à l'aide d'une récurrence faible, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n$.

• La propriété est vraie pour $n = 1$ car $v_1 = 1 = u_1$.

• Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ et montrons la pour n.

$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ v_j = u_j$ donc $v_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} v_j = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j = u_n$. Ceci achève la récurrence.

On définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

b) $u_2 = \dfrac{1}{2\times 2-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{2-1} u_j = \dfrac{1}{3}u_1 = \dfrac{1}{3}$. $u_3 = \dfrac{1}{2\times 3-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{3-1} u_j = \dfrac{1}{5}(u_1+u_2) = \dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{15}$.

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{3} \text{ et } u_3 = \frac{4}{15}.}$$

2) $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ u_j > 0$ donc : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \sum_{j=1}^{n-1} u_j \geqslant u_1 = 1$.

Alors : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_n = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geqslant \dfrac{1}{2n-1}\cdot$ Mieux : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{2n-1}$ car $u_1 = 1 \geqslant 1$!

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < 2n-1 \leqslant 2n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{2n-1} \leqslant u_n$.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{1}{2n} \leqslant u_n$ et la série de terme général $\dfrac{1}{2n}$ diverge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

Cette série étant à termes positifs et divergente, la suite de ses sommes partielles est donc croissante et divergente et tend alors vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ diverge et } \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_j = +\infty.}$$

3 a) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$(2n+1)\,u_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n-1} u_j + u_n = (2n-1)\,u_n + u_n = 2n\,u_n$. Donc $u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\,u_n$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,u_n.}$$

b) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n}{2n+1}\,u_n - u_n = -\dfrac{1}{2n+1}\,u_n < 0.$

Mieux $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$ car $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

c) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right).$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ on a alors :

$$\boxed{\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\cdot}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{2n}$ étant divergente et à termes positifs, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs permettent de dire que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \text{ diverge.}}$$

d) $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ 0 < u_{n+1} \leqslant u_n$ donc $\forall n \in [\![1,+\infty[\![,\ \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln u_n - \ln u_{n+1} \geqslant 0.$

Ainsi la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est divergente et à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{u_j}{u_{j+1}}\right)=+\infty$ ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\Big(\ln(u_j)-\ln(u_{j+1})\Big)=+\infty.$

Ce qui donne encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\ln u_1-\ln(u_{n+1})\Big)=+\infty$ ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\ln u_{n+1}-\ln 1\Big)=-\infty.$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln u_{n+1}=-\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=-\infty.}$$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=e^{\ln u_n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=-\infty$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0.}$$

4 a) Montrons par récurrence que $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ u_n=\dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}\cdot$

• $u_2=\dfrac{1}{3}$ et pour $n=2$, $\dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}=\dfrac{16}{4\times2\times\binom{4}{2}}=\dfrac{16}{8\times6}=\dfrac{1}{3}\cdot$ La propriété est donc vraie pour $n=2$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$$u_{n+1}=\frac{2n}{2n+1}\,u_n=\frac{2n}{2n+1}\,\frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}=\frac{4^n\,n!\,n!}{2(2n+1)\,(2n)!}=\frac{4^n\,(n+1)!\,(n+1)!}{(n+1)\,2(n+1)\,(2n+1)\,(2n)!}\cdot$$

$$u_{n+1}=\frac{4^n\,(n+1)!\,(n+1)!}{(n+1)\,(2n+2)!}=\frac{4^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{4\,(n+1)\,(2n+2)!}=\frac{4^{n+1}}{4(n+1)\binom{2(n+1)}{n+1}}\cdot$$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ u_n=\frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}\cdot}$$

b) $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ n\,u_n=\dfrac{n}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}u_j.$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}u_j=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n-1}u_j=+\infty$. De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\cdot$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1}u_j\right)=+\infty.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n)=+\infty.}$$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}=\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{n\,u_n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{n\,u_n}\right)=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}=0$. Ainsi :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(4^n).}$$

5) $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \dfrac{4^n}{n\binom{2n}{n}} = 4\,u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n}{n\binom{2n}{n}} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{4^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\binom{2n}{n}\right).}$$

EXERCICE 3

Remarque Le texte utilise la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}$. φ n'est donc pas une densité quelconque de X et de Y. Rappelons (?) que $x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ est l'unique densité de X définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi dans tout l'exercice nous supposerons que φ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) a) Montrons que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notons que Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Il reste alors à montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

Soit x un réel. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{Sup}\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \leqslant x\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x \text{ et } Y(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leqslant x\}$.

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, x])$.

X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ donc $X^{-1}(]-\infty, x])$ et $Y^{-1}(]-\infty, x])$ sont deux éléments de la tribu $\mathcal{T}$ qui est stable par intersection finie ou dénombrable.

Par conséquent $X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, x])$ est encore un élément de $\mathcal{T}$.

Finalement $Z^{-1}(]-\infty, x])$ est un élément de $\mathcal{T}$ et ceci pour tout réel x. Alors :

$$\boxed{Z = \mathrm{Sup}(X, Y) \text{ est une variable aléatoire réelle sur } (\Omega, \mathcal{T}, P).}$$

Montrons que Z est une variable aléatoire à densité. Notons F sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(Z \leqslant x) = P(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant x\}) = P(X \leqslant x)\, P(Y \leqslant x) = \Phi(x)\, \Phi(x) = \big(\Phi(x)\big)^2$ car X et Y sont indépendantes.

φ est une (la !) densité continue sur $\mathbb{R}$ de X donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$.

Ainsi $F = \Phi^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui suffit très largement pour dire que Z est une variable aléatoire à densité.

$$\boxed{Z = \mathrm{Sup}(X, Y) \text{ est une variable aléatoire à densité sur } (\Omega, \mathcal{T}, P).}$$

b) De plus F' est une densité de Z. Notons que : $F' = \big(\Phi^2\big)' = 2\, \Phi'\, \Phi = 2\, \varphi\, \Phi$.

$$\boxed{f : x \to 2\, \varphi(x)\, \Phi(x) \text{ est une densité de } Z = \mathrm{Sup}(X, Y).}$$

2) a) $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \sqrt{2\pi}.}$$

b) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$.

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = +\infty$.

Ainsi ψ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons aussi que $u \to e^{-u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées indique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ est de même nature que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\psi(t)\right)^2}\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ et qu'en cas de convergence ces deux intégrales sont égales.

Observons que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-\left(\psi(t)\right)^2}\,\psi'(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ et rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\psi(t)\right)^2}\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\sqrt{2\pi} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$. Par conséquent :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \sqrt{\pi}.}$$

c) et **d)** $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)\ e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\,\varphi(x)$.

Remarquons que φ' est continue sur $\mathbb{R}$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ x\,f(x) = 2\,x\,\varphi(x)\,\Phi(x) = -2\,\varphi'(x)\,\Phi(x)$.

Soit A dans $\mathbb{R}$. φ et Φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties simple donne alors :

$\displaystyle\int_0^A x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-2\,\varphi(x)\,\Phi(x)\Big]_0^A - \int_0^A \left(-2\,\varphi(x)\,\Phi'(x)\right)\mathrm{d}x = -2\,\varphi(A)\,\Phi(A) + 2\,\varphi(0)\,\Phi(0) + 2\int_0^A (\varphi(x))^2\,\mathrm{d}x.$

$\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$, $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(x))^2 = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-x^2}$.

Alors $\displaystyle\int_0^A x\,f(x)\,\mathrm{d}x = -2\,\varphi(A)\,\Phi(A) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^A e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et ceci pour tout réel A (1).

En multipliant par -1 on obtient : $\displaystyle\int_A^0 x\,f(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\varphi(A)\,\Phi(A) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_A^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et ceci pour tout réel A (2).

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^A e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_A^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Notons que $\lim_{A \to +\infty} \varphi(A) = 0$, $\lim_{A \to -\infty} \varphi(A) = 0$, $\lim_{A \to +\infty} \Phi(A) = 1$ et $\lim_{A \to -\infty} \Phi(A) = 0$, car $\forall A \in \mathbb{R},\ \varphi(A) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{A^2}{2}}$ et Φ est une fonction de répartition.

Donc $\lim_{A \to +\infty} \Big(-2\,\varphi(A)\,\Phi(A)\Big) = 0$ et $\lim_{A \to -\infty} \Big(2\,\varphi(A)\,\Phi(A)\Big) = 0$.

Alors (1) donne $\lim_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$. Ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.}$$

(2) donne $\lim_{A \to -\infty} \displaystyle\int_A^0 x\, f(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x \text{ converge et vaut } -\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$ convergent donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$ converge. Ainsi Z possède une espérance.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

$$E(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\, \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot}$$

3) a) X et Z sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ il en est donc de même pour X^2 et Z^2.

Notons F_{X^2} (resp. F_{Z^2}) la fonction de répartition de X^2 (resp. Z^2).

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{X^2}(x) = F_{Z^2}(x) = 0$ car X^2 et Z^2 prennent leurs valeurs dans $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$ car X est une variable alétoire à densité.

De même : $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = F_Z(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Rappelons que $F_Z = \Phi^2$ et que $\forall u \in \mathbb{R},\ \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 - \big(\Phi(-\sqrt{x})\big)^2 = \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 - \big(1 - \Phi(\sqrt{x})\big)^2$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 - 1 + 2\,\Phi(\sqrt{x}) - \big(\Phi(\sqrt{x})\big)^2 = \Phi(\sqrt{x}) - \big(1 - \Phi(\sqrt{x})\big) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$. Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z^2}(x) = F_{X^2}(x)$.

X^2 et Z^2 ont la même fonction de répartition donc :

$$\boxed{X^2 \text{ et } Z^2 \text{ suivent la même loi.}}$$

b) X suit la loi normale centrée réduite. Alors $E(X)$ existe et vaut 0 et $V(X)$ existe et vaut 1.

Ainsi $E(X^2)$ existe et vaut $V(X) + \big(E(X)\big)^2$, c'est à dire 1.

Comme Z^2 a même loi que X^2, Z^2 possède une espérance qui vaut 1 donc Z possède une variance.

$V(Z) = E(Z^2) - \big(E(Z)\big)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{\pi}\cdot$

$$\boxed{\text{L'espérance de } Z^2 \text{ existe et vaut 1. La variance de } Z \text{ existe et vaut } 1 - \frac{1}{\pi}\cdot}$$

PROBLÈME

Partie 1 : étude de la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$.

1) A l'instant 0 le mobile est sur le point d'abscisse 0 donc à l'instant 1 le mobile se trouve sur le point d'abscisse $0+1$ avec la probabilité $\dfrac{0+1}{0+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{0+2}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}\cdot}$$

2) Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

• $X_0(\Omega) = \{0\}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Si à l'instant n le mobile est sur le point d'abscisse k, avec k dans $[\![0, n]\!]$, à l'instant $n+1$ il se trouve sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}\cdot$

Ainsi $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k+1; k \in [\![0, n]\!]\}$.

Par conséquent $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k; k \in [\![1, n+1]\!]\} = \{0, 1, \cdots, n+1\}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}.}$$

3) a) Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et k un élément de $\{1, \ldots, n\}$.

Comme k est supérieur ou égal à 1, l'événement $\{X_n = k\}$ est contenu dans l'événement $\{X_{n-1} = k-1\}$.

Donc $\{X_n = k\} = \{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}$. Ainsi :

$P(X_n = k) = P(\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}) = P(X_{n-1} = k-1)\, P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n = k)$.

Donc $P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)\, \dfrac{(k-1)+1}{(k-1)+2} = \dfrac{k}{k+1}\, P(X_{n-1} = k-1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P(X_n = k) = \frac{k}{k+1}\, P(X_{n-1} = k-1).}$$

b) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{k+1}\, u_{n-k}$.

• Posons $n = 0$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$; $k = 0$! $P(X_n = k) = P(X_0 = 0) = u_0 = \dfrac{1}{0+1} u_{0-0} = \dfrac{1}{k+1}\, u_{n-k}$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

• Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et montrons la pour n.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. Si $k=0$: $P(X_n=k)=P(X_n=0)=u_n=\dfrac{1}{0+1}\,u_{n-0}=\dfrac{1}{k+1}\,u_{n-k}$.

Supposons k non nul. Alors n est dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\{1,\ldots,n\}$; ainsi $P(X_n=k)=\dfrac{k}{k+1}\,P(X_{n-1}=k-1)$.

$k-1$ est dans $[\![0,n-1]\!]$, l'hypothèse de récurrence donne alors : $P(X_{n-1}=k-1)=\dfrac{1}{(k-1)+1}\,u_{(n-1)-(k-1)}$.

C'est à dire $P(X_{n-1}=k-1)=\dfrac{1}{k}\,u_{n-k}$.

Donc $P(X_n=k)=\dfrac{k}{k+1}\,P(X_{n-1}=k-1)=\dfrac{k}{k+1}\,\dfrac{1}{k}\,u_{n-k}=\dfrac{1}{k+1}\,u_{n-k}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\ P(X_n=k)=\frac{1}{k+1}\,u_{n-k}.}$$

c) Soit n dans $\mathbb{N}$. $\big(\{X_k=k\}\big)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)=1$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\,u_{n-k}=1$. Le changement d'indice $j=n-k$ donne alors : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{u_j}{n-j+1}=1$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n}\frac{u_j}{n-j+1}=1.}$$

d) L'égalité précédente donne en faisant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$:

$u_0=1$, $\dfrac{u_0}{2}+u_1=1$, $\dfrac{u_0}{3}+\dfrac{u_1}{2}+u_2=1$ et $\dfrac{u_0}{4}+\dfrac{u_1}{3}+\dfrac{u_2}{2}+u_3=1$.

Alors $u_0=1$, $u_1=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. On retrouve $P(X_0=0)=u_0=1$ et $P(X_1=0)=u_1=\dfrac{1}{2}$.

$u_2=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1/2}{2}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$ et $u_3=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1/2}{3}-\dfrac{5/12}{2}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{24}=\dfrac{18-4-5}{24}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$.

$$\boxed{P(X_0=0)=u_0=1,\ P(X_1=0)=u_1=\frac{1}{2},\ P(X_2=0)=u_2=\frac{5}{12}\text{ et }P(X_3=0)=u_3=\frac{3}{8}.}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(X_n=k)=\dfrac{k}{k+1}\,P(X_{n-1}=k-1)$ donc $\forall k\in[\![1,n]\!],\ (k+1)\,P(X_n=k)=k\,P(X_{n-1}=k-1)$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,P(X_n=k)=\sum_{k=1}^{n}k\,P(X_{n-1}=k-1)$. Ce qui donne encore :

$$\sum_{k=1\text{ ou }0}^{n}k\,P(X_n=k)+\sum_{k=1}^{n}P(X_n=k)=\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\,P(X_{n-1}=i)=\sum_{i=0}^{n-1}i\,P(X_{n-1}=i)+\sum_{i=0}^{n-1}P(X_{n-1}=i).$$

Alors $E(X_n)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(X_n=k)=E(X_{n-1})+1$ ou $E(X_n)+\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)-P(X_n=0)=E(X_{n-1})+1$.

Ainsi $E(X_n)+1-u_n=1+E(X_{n-1})$ ou $E(X_n)-u_n=E(X_{n-1})$. Finalement. $E(X_n)-E(X_{n-1})=u_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $E(X_n) = E(X_n) - 0 = E(X_n) - E(X_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(E(X_k) - E(X_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} u_k.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} u_k.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $n-1$ appartient à $\mathbb{N}$!

Alors Q3 c appliquée pour $n-1$ donne $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-1)-j+1} = 1$ ou $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1\cdot$

Q3 c donne encore $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$. En détachant le dernier terme il vient : $u_n + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$

Alors $u_n = 1 - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1}\right) u_j\right).$

Donc $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\frac{n-j+1-(n-j)}{(n-j)\,(n-j+1)}\right) u_j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)\,(n-j+1)}.$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1\,,\ u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1 \text{ et } u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)\,(n-j+1)}.}$$

d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall j \in [\![0, n-1]\!], 0 < \ n-j+1 \leqslant n+1$ et $n-j > 0$.

Par produit il vient : $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ 0 < (n-j+1)\,(n-j) \leqslant (n+1)\,(n-j)$.

Alors $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ \dfrac{1}{(n+1)\,(n-j)} \leqslant \dfrac{1}{(n-j+1)\,(n-j)}$ et $0 \leqslant u_j$.

Par produit on obtient : $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ \dfrac{u_j}{(n+1)\,(n-j)} \leqslant \dfrac{u_j}{(n-j+1)\,(n-j)}.$

En sommant ceci donne : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n+1)\,(n-j)} \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j+1)\,(n-j)}.$

Ou encore : $\displaystyle\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)\,(n-j+1)}.$

Comme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1$ et $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)\,(n-j+1)}$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n\cdot$

Notons que cette dernière inégalité vaut encore pour $n = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\ u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

La série de terme général u_n diverge et est à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles est croissante et non convergente donc tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = +\infty$. Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty.}$$

Partie 2 : étude du premier retour à l'origine.

---

1) a) De toute évidence :

$$\boxed{\{T=1\} = \{X_1 = 0\} \text{ et } \{T=k\} = \{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1}=k-1\} \cap \{X_k=0\}.}$$

b) Soit k un élément de $[\![3,+\infty[\![$. $\{T=k\} = \{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \cdots \cap \{X_{k-1}=k-1\} \cap \{X_k=0\}$.

La formule des probabilités composées montre alors que $P(T=k)$ vaut :

$$P(X_1=1)\left(\prod_{i=2}^{k-1} P_{\{X_1=1\}\cap\{X_2=2\}\cap\cdots\cap\{X_{i-1}=i-1\}}(X_i=i)\right) P_{\{X_1=1\}\cap\{X_2=2\}\cap\cdots\cap\{X_{k-1}=k-1\}}(X_k=0).$$

$P(X_1=1) = 1 - P(X_1=0) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$ Pour tout élément i de $[\![2,k-1]\!]$:

$$P_{\{X_1=1\}\cap\{X_2=2\}\cap\cdots\cap\{X_{i-1}=i-1\}}(X_i=i) = P_{\{X_{i-1}=i-1\}}(X_i=i) = \frac{(i-1)+1}{(i-1)+2} = \frac{i}{i+1}\cdot$$

De plus $P_{\{X_1=1\}\cap\{X_2=2\}\cap\cdots\cap\{X_{k-1}=k-1\}}(X_k=0) = P_{\{X_{k-1}=k-1\}}(X_k=0) = \dfrac{1}{(k-1)+2} = \dfrac{1}{k+1}\cdot$

Alors $P(T=k) = \dfrac{1}{2}\left(\prod\limits_{i=2}^{k-1} \dfrac{i}{i+1}\right)\dfrac{1}{k+1} = \left(\prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{i}{i+1}\right)\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k\,(k+1)}\cdot$

Ainsi $P(T=k) = \dfrac{1}{k\,(k+1)}\cdot$ Montrons que ce dernier résultat vaut encore pour $k=1$ et $k=2$.

$P(T=1) = P(X_1=0) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1\,(1+1)}\cdot$

$P(T=2) = P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}) = P(X_1=1)\,P_{\{X_1=1\}}(X_2=0) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{2\,(2+1)}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T=k) = \frac{1}{k\,(k+1)}\cdot}$$

c) • Soient deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k\,(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}\cdot$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{(k+1)} = a + \dfrac{k\,b}{k+1}\cdot$

En faisant tendre k vers $+\infty$ il vient $0 = a + b$ donc $b = -a$.

En posant $k = 1$ on obtient : $\dfrac{1}{2} = a + \dfrac{b}{2}$ donc $2\,a + b = 1$.

$b = -a$ et $2\,a + b = 1$ donne sans difficulté $a = 1$ et $b = -1$.

• Réciproquement posons $a = 1$ et $b = -1$. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k\,(k+1)} = \dfrac{1}{k\,(k+1)}$.

$$\boxed{\text{LES constantes } a \text{ et } b \text{ telles que } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \text{ sont respectivement 1 et } -1.}$$

$$P(T=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T=k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

$P(T=0) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - 1 = 0$. Donc

$$\boxed{P(T=0) = 0 \text{ et il est donc quasi-impossible que le mobile ne retourne pas à l'origine.}}$$

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,P(T=k) = \dfrac{1}{k+1}$ donc la série de terme général $k\,P(T=k)$ est divergente. Ainsi :

$$\boxed{T \text{ n'a pas d'espérance.}}$$

Partie 3 : informatique.

---

1) Notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = 1 - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{k-j+1}$.

En faisant le changement d'indice $i = j+1$ on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{u_{i-1}}{k-i+2}$.

On peut aussi faire le changement d'indice $i = k - j$ et obtenir : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{u_{k-i}}{i+1}$.

Répondons alors à la question en réécrivant la onzième ligne du programme (pour le moins le begin end ne s'impose pas...)

```
For i:=1 to k do s:=s+u[i-1]/(k-i+2); u[k]:=1-s;
```

Ou

```
For i:=1 to k do s:=s+u[k-i]/(i+1); u[k]:=1-s;
```

Il était sans doute plus naturel d'écrire :

```
For i:=0 to k-1 do s:=s+u[i]/(k-i+1); u[k]:=1-s;
```

Pour le deuxième point en se souvenant que $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} u_k$ on peut écrire en treizième ligne :

```
e:=e+u[k];
```

2) a) Ici c'est plus subtil. Notons que la variable T contient le temps.

Observons également que l'on commence par incrémenter T et que l'on décide après si le mobile retourne à l'origine ou pas.

Supposons qu'après l'instruction T :=T+1, T contienne la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$). Le mobile se trouve alors au point d'abscisse $k-1$ et il convient de décider si à l'instant k il retourne en O, d'arrêter dans ce cas le processus et de le poursuivre dans le cas contraire.

Le mobile étant au point d'abscisse $k-1$ il retourne à l'origine avec la probabilité $\dfrac{1}{(k-1)+2} = \dfrac{1}{k+1}$.

Remarquons que si l'on tire un nombre au hasard dans $[\![0, k]\!]$ on obtient 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+1}$.

Remarquons également que random(k+1) donne un entier au hasard entre 0 et k et k est la valeur contenue dans T.

Ainsi en stockant random(T+1) dans la variable hasard on décidera que le point est de retour à l'origine si (et seulement si) hasard a pris la valeur 0. La cinquième ligne du second programme peut donc être :

```
Repeat T:=T+1;hasard:=random(T+1);until(hasard=0);
```

b) Le nombre de passages dans la boucle peut être infini dans le cas où hasard ne prend jamais la valeur 0. La partie II nous a montré que cela était quasi-impossible.

$$\boxed{\text{Le nombre de passages dans la boucle est presque sûrement fini.}}$$