Corrigé

Exercice 1

1) a) Le vecteur $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ est calculé avec la commande `x.^(1:n)`, ensuite on ajoute les éléments de ce vecteur donc la fonction `Scilab` complétée est la suivante :

```
function y=f(x,n)
y=sum(x.^(1:n))
endfunction
```

b) On a $f_n(x)=\begin{cases} x\times\dfrac{1-x^n}{1-x}=\dfrac{x-x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x\neq 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n \text{ si } x=1\end{cases}$ donc on peut écrire :

```
function y=f(x,n)
  if x==1 then y=n
         else y=(x-x^(n+1))/(1-x)
  end
endfunction
```

2) La fonction f_n est polynomiale donc dérivable et on a : $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

Comme $x\in[0,1]$, $f_n'(x)=1+2x+...+nx^{n-1}\geq 1>0$. Par conséquent, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$, et comme elle est continue (car dérivable), elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,n]$. Comme 1 appartient à $[0,n]$, l'équation $f_n(x)=1$ possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.

3) a) On a $f_{n+1}(\alpha_n)=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_n^k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_n^k + \alpha_n^{n+1} = f_n(\alpha_n)+\alpha_n^{n+1} = 1+\alpha_n^{n+1}$.

Comme $\alpha_n\geq 0$, on trouve bien :

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n)\geq 1}$$

On a $f_{n+1}(\alpha_n)\geq 1$ et, par définition de α_{n+1}, on a $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=1$ donc on en déduit : $f_{n+1}(\alpha_n)\geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.

Comme f_{n+1} est strictement croissante, on obtient : $\alpha_n\geq\alpha_{n+1}$.

Conclusion :

$$\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.

4) a) α_2 est la solution de l'équation $x+x^2=1$ sur $[0,1]$. Cette équation s'écrit $x^2+x-1=0$ et ses solutions sont : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme la première de ces deux solutions est strictement négative, on conclut :

$$\boxed{\alpha_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

On a $\sqrt{5}<\sqrt{9}$ donc $\alpha_2<\dfrac{-1+3}{2}$, c'est-à-dire $\alpha_2<1$. On sait depuis la question 2) que α_2 appartient à $[0,1]$ donc on a bien :

$$\boxed{0\le\alpha_2<1}$$

b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $0\le\alpha_n\le\alpha_2$ et, par croissance de la fonction $t\mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $0\le\alpha_n^{n+1}\le\alpha_2^{n+1}$. On a montré à la question 4a) que $|\alpha_2|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_2^{n+1}=0$. Par encadrement, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\alpha_n^{n+1}=0}$$

c) En revenant à la définition de α_n, on sait que $f_n(\alpha_n)=1$, et comme α_n est différent de 1, on a $\dfrac{\alpha_n-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n}=1$, ce qui s'écrit aussi $\alpha_n-\alpha_n^{n+1}=1-\alpha_n$, ou encore : $2\alpha_n-1=\alpha_n^{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n^{n+1}=0$, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\alpha_n-1)=0$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\frac{1}{2}}$$

5) Le script proposé cherche la première valeur de x pour laquelle on a $f_n(x)\ge 1$ ce qui implique que celle d'avant (c'est $x-0,001$) était telle que $f_n(x-0,001)<1$. On a donc : $f_n(x-0,001)<1\le f_n(x)$. En remplaçant 1 par $f_n(\alpha_n)$, on obtient : $f_n(x-0,001)<f_n(\alpha_n)\le f_n(x)$.
Par stricte croissance de f_n, on a : $x-0,001<\alpha_n\le x$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Le script proposé donne une valeur approchée de } \alpha_n \text{ à 0,001 près par excès}}$$

Exercice 2

1) a) Dire que la variable prenant la plus grande des valeurs prises par $X_1,...,X_n$ (il s'agit de M_n) prend une valeur inférieure ou égale à *x*, c'est dire que chacune des variables $X_1,...,X_n$ a pris une valeur inférieure ou égale à *x* (sinon, M_n ne serait pas inférieure ou égal à *x*). on a donc :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \le x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \le x]\right)$$

Comme X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$F_{M_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \le x) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x)$$

Les variables X_k suivent toutes la même loi donc : $F_{M_n}(x) = \left(F_{X_1}(x)\right)^n$.

La loi de X_1 est la loi uniforme sur $[0,1]$ donc $F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Bilan :

$$\boxed{F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^n \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

Les restrictions de F_{M_n} aux intervalles $]-\infty, 0[$, $]1, +\infty[$ sont de classe C^1 (donc continues) en tant que fonctions constantes et la restriction de F_{M_n} à l'intervalle $[0,1]$ est de classe C^1 (donc continue) en tant que fonction polynomiale (pas si "poly" que ça d'ailleurs).
De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{M_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{M_n}(x) = F_{M_n}(0) = 0$.
Bilan : la fonction F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0, donc M_n est une variable à densité.

b) On dérive F_{M_n} sauf en 0 et en 1, ce qui donne : $F_{M_n}'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ nx^{n-1} \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

En posant, par exemple, $f_{M_n}(0) = 0$ et $f_{M_n}(1) = n$, on obtient une densité f_{M_n} de M_n définie par :

$$\boxed{f_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ nx^{n-1} \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

c) • Les variables M_n et M_n^2 sont positives et inférieures ou égales à 1 donc, par domination, $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$ existent (car la variable certaine égale à 1 possède une espérance et un moment d'ordre 2).

• De plus, comme f_{M_n} est nulle ailleurs que sur $[0,1]$, on a :

$$E(M_n)=\int_0^1 x\times nx^{n-1}dx=\int_0^1 nx^n dx=\left[\frac{n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

Par conséquent :

$$\boxed{E(M_n)=\frac{n}{n+1}}$$

• De même, on a $E(M_n^2)=\int_0^1 x^2\times nx^{n-1}dx=\int_0^1 nx^{n+1}dx=\left[\frac{n}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$.

Par conséquent :

$$\boxed{E(M_n^2)=\frac{n}{n+2}}$$

d) En appliquant l'inégalité de Markov à la variable $(M_n-1)^2$ qui a une espérance (car $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$ existent) et qui est bien positive, on trouve, pour tout $\varepsilon>0$:

$$P\left((M_n-1)^2\geq\varepsilon^2\right)\leq\frac{E\left((M_n-1)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

En développant, on a : $E\left((M_n-1)^2\right)=E(M_n^2-2M_n+1)$ et, par linéarité de l'espérance, on trouve : $E\left((M_n-1)^2\right)=E(M_n^2)-2E(M_n)+1$.

En remplaçant par les expressions trouvées plus haut, on a :

$$E\left((M_n-1)^2\right)=\frac{n}{n+2}-2\times\frac{n}{n+1}+1=\frac{n(n+1)-2n(n+2)+(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

Après simplifications : $E\left((M_n-1)^2\right)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

Finalement :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P\left((M_n-1)^2\geq\varepsilon^2\right)\leq\frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}}$$

e) La fonction "racine carrée" est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc on a l'égalité des événements $\left((M_n-1)^2\geq\varepsilon^2\right)$ et $\left(\sqrt{(M_n-1)^2}\geq\sqrt{\varepsilon^2}\right)$:

L'inclusion $\subset$ est assurée par la croissance de la fonction "racine carrée" et l'inclusion $\supset$ est assurée par la croissance de la fonction "carré".

On obtient donc : $\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2 \right) = \left(|M_n - 1| \geq |\varepsilon| \right)$.

Comme $\varepsilon > 0$, il reste : $\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2 \right) = \left(|M_n - 1| \geq \varepsilon \right)$.

Avec la question 1d), on trouve :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P\left(|M_n - 1| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}}$$

Une probabilité étant positive, on a l'encadrement :

$$0 \leq P\left(|M_n - 1| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}$$

Par encadrement, on conclut :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - 1| \geq \varepsilon \right) = 0}$$

Ce résultat signifie que la suite (M_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

2) a) Avec le rappel fait, il n'y a pas trop de mystère :

```
function Y=f(n)
x = grand(1,n,'unf',0,1)
Y =n*(1-max(x))
endfunction
```

b) Comme les histogrammes se ressemblent pour une grande valeur de *n*, on peut penser que, si *n* est assez grand, la loi de Y_n est "proche" de la loi d'une variable *Z* suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Plus précisément :

- La hauteur du premier rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de $F_Z(1)$, la hauteur du premier rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de $F_{Y_n}(1)$. On en déduit $F_Z(1) \approx F_{Y_n}(1)$.
- La hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de $F_Z(2) - F_Z(1)$, la hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de $F_{Y_n}(2) - F_{Y_n}(1)$. On en déduit $F_Z(2) \approx F_{Y_n}(2)$.
- Et ainsi de suite.

On peut donc conjecturer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

3) a) Pour commencer, comme $M_n(\Omega) = [0,1]$, on a $Y_n(\Omega) = [0,n]$.

Ensuite, par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(n(1 - M_n) \leq x\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = P\left(1 - M_n \leq \frac{x}{n}\right) = P\left(M_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - F_{M_n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.

On remplace selon que $1-\frac{x}{n}<0$, $0\le 1-\frac{x}{n}\le 1$ ou $1-\frac{x}{n}>1$, c'est-à-dire selon que $x>n$, $0\le x\le n$ ou $x<0$.

On trouve :

$$\boxed{F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0\le x\le n\\ 1 \text{ si } x>n\end{cases}}$$

b) Pour tout $x\ge 0$, on a $x\le n$, dès que n est assez grand, et ainsi :

$$F_{Y_n}(x)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

De plus, pour tout n strictement supérieur à x, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$ existe et on a :

$$F_{Y_n}(x)=1-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$$

• Si $x=0$, on a $F_{Y_n}(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=0$.

• Si $x>0$, alors comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0$, on a : $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{x}{n}$ (x n'est pas nul donc l'équivalent est correct).

On en déduit $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-x$ et ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)=-x$.

Par continuité de la fonction exponentielle en $-x$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=1-e^{-x}$

En regroupant les résultats des deux points précédents, on conclut :

$$\boxed{\forall x\ge 0,\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=1-e^{-x}}$$

c) Pour tout x strictement négatif, on a $F_{Y_n}(x)=0$ donc :

$$\boxed{\forall x<0,\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=0}$$

D'après les deux limites encadrées ci-dessus, on peut conclure que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3 ....

1) a) On a $A=\begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\boxed{A=J-(n+1)I}$$

On trouve ensuite (et c'est classique) que $J^2=nJ$ et, comme I et J commutent, on en déduit $A^2=J^2-2(n+1)J+(n+1)^2I^2=nJ-2(n+1)J+(n+1)^2I$.
En simplifiant :

$$\boxed{A^2=(n+1)^2I-(n+2)J}$$

b) En remplaçant J par $A+(n+1)I$, on obtient :
$A^2=(n+1)^2I-(n+2)(A+(n+1)I)=\big((n+1)^2-(n+1)(n+2)\big)I-(n+2)A$.
On a donc :

$$\boxed{A^2=-(n+1)I-(n+2)A}$$

Un polynôme annulateur de A est donc :

$$\boxed{X^2+(n+2)X+(n+1)}$$

On sait que les racines de ce polynôme sont les valeurs propres possibles de A, ce qui montre que les valeurs propres possibles de A sont : -1 et $-n-1$.

c) Comme 0 n'est pas valeur propre de A (les seules possibles étant -1 et $-n-1\leq -1$), on est certain que :

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

2) On a, par bilinéarité du produit scalaire (pour les 3ème et 4ème égalités) :

$$\|u\|^2=\langle u,u\rangle=\left\langle \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i,\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j\right\rangle=\frac{1}{n+1}\left\langle\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i,\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j\right\rangle=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle$$

Comme la base $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ est une base orthonormale de E, les produits scalaires $\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle$ sont nuls si $i\neq j$ et valent 1 si $i=j$ donc il reste :

$$\|u\|^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_i\rangle=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}1=1$$

Par conséquent, comme une norme est positive :

$$\boxed{\|u\|=1}$$

3) a) On a $\| e_i \|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right) \right\rangle$

Par bilinéarité, on obtient : $\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n} \left\langle \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right) \right\rangle$

Et encore par bilinéarité :

$$\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n}\left(\| \varepsilon_i \|^2 - \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle u, \varepsilon_i \rangle - \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle \varepsilon_i, u \rangle + \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 \| u \|^2 \right)$$

Par symétrie du produit scalaire, on peut simplifier :

$$\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n}\left(\| \varepsilon_i \|^2 - 2\langle \varepsilon_i, u \rangle^2 + \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 \| u \|^2 \right)$$

Comme $\| u \|^2 = 1$ et $\| \varepsilon_i \|^2 = 1$, il reste : $\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 \right)$

Pour finir, on calcule $\langle \varepsilon_i, u \rangle$:

$$\langle \varepsilon_i, u \rangle = \left\langle \varepsilon_i, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=0}^{n} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

En remplaçant dans $\| e_i \|^2$, on trouve : $\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ \| e_i \| = 1}$$

b) De la même façon, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u \rangle u \right) \right\rangle$$

En développant par bilinéarité, on obtient :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{n+1}{n}\left(\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle - \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle u, \varepsilon_j \rangle - \langle \varepsilon_j, u \rangle \langle \varepsilon_i, u \rangle + \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle \varepsilon_j, u \rangle \| u \|^2 \right)$$

Par orthogonalité de la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$, on a toujours $\| u \|^2 = 1$, et comme précédemment, on a $\langle \varepsilon_i, u \rangle = \langle \varepsilon_j, u \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc il reste :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{n+1}{n}\left(0 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)$$

En conclusion, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a :

$$\boxed{\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}}$$

c) On a : $\langle e_i, u \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), u \right\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left\langle \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), u \right\rangle$.

$\langle e_i, u \rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\langle \varepsilon_i, u \rangle - -\langle \varepsilon_i, u \rangle \| u \|^2 \right) = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\langle \varepsilon_i, u \rangle - -\langle \varepsilon_i, u \rangle \right)$, car $\| u \|^2 = 1$.

Finalement, on trouve $\langle e_i , u\rangle = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!],\ e_i \in \left(\mathrm{Vect}(u)\right)^{\perp}}$$

d) Montrons que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre. Soit donc n réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \left\langle e_k \ , \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle = 0$$

En développant on obtient (bilinéarité toujours) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_k , e_i\rangle = 0$, et en se souvenant que $\| e_i \| = 1$, et pour $i \neq j$ $\langle e_i , e_j\rangle = -\frac{1}{n}$, on a : $\alpha_k - \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \alpha_i = 0$.

En multipliant par $-n$, on obtient : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \alpha_i - n\alpha_k = 0$.

Matriciellement, ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme A est inversible, ce système possède la seule solution

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Conclusion : la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre de F.

Pour finir, comme $\dim E = n+1$ et $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$, on a $\dim\left(\mathrm{Vect}(u)\right)^{\perp} = n$.

Par conséquent, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre de n vecteurs de F, qui est de dimension n, donc :

$$\boxed{(e_1, e_2, ..., e_n) \text{ est une base de } F}$$

4) a) • Tout d'abord, on note que $f(x, y)$ est un réel.

• Montrons que f est linéaire à gauche. Soit donc un réel λ et trois vecteurs x_1, x_2 et y de F. On a :

$$f(\lambda x_1 + x_2, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle \lambda x_1 + x_2 , e_k\rangle \langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle \lambda x_1 + x_2 , y\rangle$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$f(\lambda x_1 + x_2, y) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \langle x_1 , e_k\rangle + \langle x_2 , e_k\rangle)\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}(\lambda \langle x_1 , y\rangle + \langle x_2 , y\rangle)$$

En scindant les sommes, on a :

$$f(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \sum_{k=0}^{n} \langle x_1, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle + \sum_{k=0}^{n} \langle x_2, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \lambda \times \frac{n+1}{n} \langle x_1, y \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x_2, y \rangle$$

En regroupant les termes en λ, on a :

$f(\lambda x_1 + x_2, y) =$

$$\lambda \left(\sum_{k=0}^{n} \langle x_1, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x_1, y \rangle \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \langle x_2, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x_2, y \rangle \right)$$

Finalement, on a $f(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda f(x_1, y) + f(x_2, y)$, ce qui prouve que *f* est linéaire à gauche.

- Montrons que *f* est symétrique. On a :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad f(y, x) = \sum_{k=0}^{n} \langle y, e_k \rangle \langle x, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle y, x \rangle$$

Ainsi, par commutativité de la multiplication et symétrie du produit scalaire, on a : $f(y, x) = f(x, y)$.

Conclusion : *f* est une forme, linéaire à gauche et symétrique donc :

$$\boxed{f \text{ est une forme bilinéaire symétrique}}$$

b) • Pour $i = j$:

$$f(e_i, e_i) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k \rangle \langle e_i, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 - \frac{n+1}{n} \| e_i \|^2 .$$

Dans la somme, il y a un terme $\langle e_i, e_i \rangle^2$ qui vaut $\| e_i \|^2 = 1$ et les $n-1$ autres valent $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$. On en déduit :

$$f(e_i, e_i) = 1 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n} = 1 + n \times \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}$$

Bilan :

$$\boxed{f(e_i, e_i) = 0}$$

• Pour $i \neq j$:

$$f(e_i, e_j) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k \rangle \langle e_j, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle e_i, e_j \rangle$$

Dans la somme, il y a deux termes $\langle e_i, e_i \rangle \langle e_j, e_i \rangle$ et $\langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, e_j \rangle$ qui valent $-\frac{1}{n}$ et les $n-1$ autres valent $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$. On en déduit :

$$f(e_i, e_j) = -\frac{2}{n} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n} \times \left(-\frac{1}{n} \right) = -\frac{2n}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n+1}{n^2}$$

Bilan :

$$\boxed{f(e_i, e_j) = 0}$$

c) Comme $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de *F*, on peut écrire, pour tout *x* et tout *y* de *F* : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

Dès lors, par bilinéarité de *f*, on a :

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j)$$

D'après la question 4b), on a donc : $\forall (x, y) \in F \times F$, $f(x, y) = 0$.

Par définition de *f*, ceci signifie :

$$\boxed{\forall (x, y) \in F \times F,\ \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle}$$

d) L'égalité précédente étant valable pour tout *x* et pour tout *y* de *F*, on peut l'appliquer avec $y = x$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = \frac{n+1}{n} \| x \|^2$$

En multipliant chaque membre par $\frac{n}{n+1}$, on trouve :

$$\boxed{\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2}$$

Problème ....

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

1) • Pour tous polynômes *P* et *Q* de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout réel λ, on a :

$$\varphi(P + \lambda Q) = \sum_{k=0}^{n} (P + \lambda Q)^{(k)}$$

Par linéarité de la dérivation, on obtient :

$$\varphi(P + \lambda Q) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} + \lambda \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$$

L'application φ est donc linéaire.

• De plus, si *P* est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire un polynôme de degré inférieur ou égal à *n*, alors $P, P', ..., P^{(n)}$ sont encore des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ donc, par stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par l'addition, $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

2) a) On a $\varphi(e_0)=\sum_{k=0}^{n} e_0{}^{(k)}$ et comme e_0 est constant (égal à 1), les dérivées $e_0{}^{(k)}$, pour k appartenant à $[\![1,n]\!]$, sont nulles et il reste le seul terme $e_0{}^{(0)}=e_0$:

$$\boxed{\varphi(e_0)=e_0}$$

Comme e_0 n'est pas nul, l'égalité précédente prouve que :

$$\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } \varphi}$$

b) On a $\varphi(e_j)-e_j=\sum_{k=0}^{n} e_j{}^{(k)}-e_j=\sum_{k=1}^{n} e_j{}^{(k)}$.

Comme $\deg(e_j)=j$, les dérivées $e_j{}^{(k)}$, pour k appartenant à $[\![1,n]\!]$, sont, soit nulles (si $k>j$), soit de degré inférieur ou égal à $j-1$ (si $1\le k\le j$). Par conséquent :

$$\boxed{\forall j\in[\![1,n]\!],\ \varphi(e_j)-e_j\in\mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

c) Le résultat de la question précédente s'écrit pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $\varphi(e_j)=e_j+Q_{j-1}$, où $Q_{j-1}\in\mathbb{R}_{j-1}[X]$, soit $\varphi(e_j)=e_j+\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k\,e_k$, et ainsi, la colonne donnant $\varphi(e_j)$ s'écrit $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_{j-1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, le terme égal à 1 étant sur la diagonale de la matrice. Par conséquent, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}=(e_0, e_1, ..., e_n)$ est de la forme $\begin{pmatrix}1 & \times & \dots & \times\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & (0) & \ddots & \times\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$: ceci montre qu'elle est triangulaire et que, comme les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux, alors :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } \varphi \text{ est } 1}$$

d) 0 n'est pas valeur propre de φ donc φ est injectif, et en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie, φ est bijectif.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

Remarque. On pouvait aussi écrire : la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire, sans élément diagonal nul donc elle est inversible, et ainsi, φ est bijectif.

3) a) Par linéarité de φ, on a $\varphi(P-P')=\varphi(P)-\varphi(P')=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}-\sum_{k=0}^{n}P^{(k+1)}$.

Par "télescopage", il reste : $\varphi(P-P')=P-P^{(n+1)}$.

Comme P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, la dérivée $P^{(n+1)}$ est nulle et on a :

$$\boxed{\varphi(P-P')=P}$$

b) En composant l'égalité précédente par φ^{-1} (qui existe car φ est bijectif), on obtient $\varphi^{-1}\left(\varphi(P-P')\right)=\varphi^{-1}(P)$, soit :

$$(\varphi^{-1}\circ\varphi)(P-P')=\varphi^{-1}(P)$$

Comme $\varphi^{-1}\circ\varphi=Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, on a :

$$\boxed{\varphi^{-1}(P)=P-P'}$$

On en déduit $\varphi^{-1}(e_0)=e_0$ et, pour tout j de $[\![1,n]\!]$: $\varphi^{-1}(e_j)=e_j-e_j{}'=e_j-je_{j-1}$

La matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Le script `Scilab` proposé construit la matrice `M` comme la matrice identité à laquelle sont ajoutés les termes juste au-dessus de la diagonale qui valent -1, -2, …, $-n$. On en déduit que `M` est la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

La matrice de φ est l'inverse de celle de φ^{-1} donc on complète la ligne ainsi :

```
A = M^-1
```

Partie 2

4) a) L'intégrale $\int_x^{+\infty}t^ke^{-t}dt$ est le reste de l'intégrale convergente $\Gamma(k+1)$ donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty}t^ke^{-t}dt \text{ est convergente}}$$

b) En écrivant $P(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, il apparaît que l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t)\,e^{-t}dt$ est une combinaison linéaire des intégrales $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ qui sont convergentes, donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} P(t)\,e^{-t}dt \text{ est convergente}}$$

5) a) On a $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_x^{A} e^{-t}dt = \lim\limits_{A\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_x^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-e^{-A}+e^{-x}\right)$.
Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A}=0$, on obtient :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}}$$

b) Procédons par récurrence :

- Pour $k=0$, on a $\int_x^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = \int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$ et $0!\sum_{i=0}^{0}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = 0!\times\frac{x^0}{0!}e^{-x} = e^{-x}$

donc on a bien : $\int_x^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = 0!\sum_{i=0}^{0}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$

- Supposons que, pour un certain entier naturel *k*, on ait : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$.

Par intégration par parties dans l'intégrale $\int_x^{A} t^{k+1}e^{-t}dt$, en posant $u'(t)=e^{-t}$ et $v(t)=t^{k+1}$, on peut choisir $u(t)=-e^{-t}$ et on a $v'(t)=(k+1)t^k$. Les fonctions *u* et *v* sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle $[x,A]$, et ainsi, l'intégration par parties est licite. Elle donne :

$$\int_x^{A} t^{k+1}e^{-t}dt = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_x^A + (k+1)\int_x^{A} t^k e^{-t}dt$$

Après développement du crochet, on a :

$$\int_x^{A} t^{k+1}e^{-t}dt = x^{k+1}e^{-x} - A^{k+1}e^{-A} + (k+1)\int_x^{A} t^k e^{-t}dt$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{k+1}e^{-A}=0$ et comme les deux intégrales en jeu ont une limite finie lorsque *A* tend vers $+\infty$ (en effet $\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt$ et $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ convergent), on a, après passage à la limite :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$ donc :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\times k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$$

En écrivant $x^{k+1}e^{-x}=(k+1)!\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}$ et en intégrant ce terme dans la somme (c'est le terme d'indice $k+1$), on trouve $\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt=(k+1)!\sum_{i=0}^{k+1}\dfrac{x^i}{i!}e^{-x}$, ce qui achève l'hérédité.

• Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}}$$

6) a) D'après la question 5b), on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt=k!\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}e^{-x}$.

La troisième ligne du script calcule k ! et la sixième ligne (affichage de s) prouve que `s` représente $k!\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}e^{-x}$ (c'est ce qui est demandé). Par conséquent les pointillés dans `s` doivent représenter $\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}$. Il semble donc que le vecteur `u` de la quatrième ligne soit $\left(\dfrac{x^0}{0!},\dfrac{x^1}{1!},\ldots,\dfrac{x^k}{k!}\right)$ et on le sommera pour obtenir la commande donnant `s`.

Pour calculer `u`, il faut diviser élément à élément le vecteur $(x^0,\,x^1,\,\ldots,\,x^k)$ par le vecteur $(0!,\,1!,\,\ldots,\,k!)$.

• Première méthode : on obtient $(x^0,\,x^1,\,\ldots,\,x^k)$ avec `x.^(0:k)` et $(0!,\,1!,\,\ldots,\,k!)$ avec `[1,cumprod(1:k)]` : la concaténation est obligatoire, sinon, avec `cumprod(0:k)`, on obtiendrait le vecteur nul !

Les commandes complétées sont donc :

```
u=x.^(0:k)./[1,cumprod(1:k)]
s=p*sum(u)*exp(-x)
```

• Deuxième méthode : on obtient $(x^1,\,\ldots,\,x^k)$ avec `x.^(1:k)` et $(1!,\,\ldots,\,k!)$ avec `cumprod(1:k)`. En remarquant qu'il reste à ajouter $\dfrac{x^0}{0!}$, c'est-à-dire 1, pour obtenir $\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}$, les commandes complétées sont :

```
u=x.^(1:k)./cumprod(1:k)
s=p*(1+sum(u))*exp(-x)
```

b) En posant $u=t-x$ qui est un changement de variable de classe C^1 sur $[x,+\infty[$ et bijectif de $[x,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(u+x)^k\, e^{-(u+x)}du$

Comme $e^{-(u+x)} = e^{-u}e^{-x}$, on obtient :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = e^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k\, e^{-u} du}$$

En regardant bien l'intégrale $\int_0^{+\infty} (u+x)^k\, e^{-u} du$, on pense à une variable aléatoire Z suivant la loi exponentielle de paramètre 1 (de densité $u \mapsto e^{-u}$ sur $\mathbb{R}_+$ et nulle ailleurs) et le théorème de transfert montre que cette intégrale est $E\left((Z+x)^k\right)$.

On calcule une valeur approchée de cette espérance par la moyenne empirique d'un grand nombre (ici $100\,000$) de variables indépendantes, toutes de même loi que $(Z+x)^k$. On peut alors proposer :

```
k=input('entrez la valeur de k : ')
Z=grand(1,100 000,'exp',1)
s=mean((Z+x).^k)
disp(s)
```

7) a) • Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} (P+\lambda Q)(t)\, e^{-t} dt$.

Par définition de l'addition des fonctions, on en déduit :

$$\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} \big(P(t)+\lambda Q(t)\big) e^{-t} dt$$

Par linéarité de l'intégration, on a alors :

$$\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)\, e^{-t} dt + +\lambda e^x \int_x^{+\infty} Q(t)\, e^{-t} dt$$

On a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = \big(\psi(P)\big)(x) + \lambda\big(\psi(Q)\big)(x) = \big(\psi(P)+\lambda\psi(Q)\big)(x)$

Ceci prouve (définition de l'égalité de deux fonctions) que :

$$\psi(P+\lambda Q) = \psi(P) + \lambda\psi(Q)$$

Conclusion : ψ est linéaire.

• Montrons que si P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, alors $\psi(P)$ aussi.

Comme P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, t^k$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)\, e^{-t} dt = e^x \int_x^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, t^k e^{-t} dt$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(P)(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

On sait, d'après la question 5b), que $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$, d'où :

$\psi(P)(x)=e^x\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\alpha_k k!\frac{x^i}{i!}$. Ceci montre bien que $\psi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à *n*.

• Conclusion :

$$\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

b) En écrivant $\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt-\int_0^{x}P(t)e^{-t}dt$, grâce à la relation de Chasles, on constate que la fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ est constante (donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et que la fonction $x\mapsto\int_0^{x}P(t)e^{-t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en tant que primitive de la fonction continue $t\mapsto P(t)e^{-t}$.

Par conséquent, $x\mapsto\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ est la différence de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Comme $F(x)=e^x\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$, la fonction *F* est le produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et ainsi :

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Avec l'égalité $\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt-\int_0^{x}P(t)e^{-t}dt$, on voit que la dérivée de $x\mapsto\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ est $x\mapsto -P(x)e^{-x}$ et ensuite, par la formule de dérivation d'un produit, on trouve : $F'(x)=e^x\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt-e^xP(x)e^{-x}$.

En simplifiant, on a :

$$\boxed{F'(x)=F(x)-P(x)}$$

c) Si *P* est un polynôme de $\text{Ker}(\psi)$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\psi(P)(x)=0$. Avec la notation de l'énoncé, ceci s'écrit : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=0$.

En dérivant, on obtient $F'(x)=0$ et grâce à l'égalité $F'(x)=F(x)-P(x)$, on en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=0$.

Ceci prouve que ψ est injectif donc bijectif (car ψ opère dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie)

$$\boxed{\psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

8) a) Comme *P* est un polynôme, vecteur propre de ψ pour la valeur propre λ, on a : $\psi(P)=\lambda P$ et en évaluant cette égalité en *x*, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(\psi(P)\big)(x) = \lambda P(x)$$

Toujours avec la notation de l'énoncé, ceci s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = \lambda P(x) \qquad (1)$$

En dérivant, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F'(x) = \lambda P'(x) \qquad (2)$$

En injectant (1) et (2) dans la relation $F'(x) = F(x) - P(x)$, on a :

$$\lambda P'(x) = \lambda P(x) - P(x)$$

Finalement, comme $\lambda \neq 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P(x)$.

Conclusion :

$$\boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P}$$

b) L'égalité précédente montre que P' et $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}P$ sont égaux donc ont le même degré. Dès lors, si λ était différent de 1, P' et P seraient de même degré (puisque $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}P$ et P seraient de même degré), ce qui n'est pas le cas puisque P est non nul (en tant que vecteur propre).

Conclusion :

$$\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre possible de } \psi}$$

c) Il faut trouver un polynôme P non nul tel que $\psi(P) = P$. Si on se souvient du calcul fait à la question 5a), on a : $\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-x}$. En multipliant par e^x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$. Ceci signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(\psi(e_0)\big)(x) = e_0(x)$$

On a donc $\psi(e_0) = e_0$, et comme e_0 n'est pas le polynôme nul, on peut conclure :

$$\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre de } \psi}$$

9) a) Montrons que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = \psi(P)$. Il suffit de montrer que φ et ψ coïncident sur la base $\mathcal{B}$.

- On a d'une part :

$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(\varphi(e_j)\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} e_j^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{j} e_j^{(k)}(x)$ (on a enlevé les termes nuls).

En se souvenant que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^j$ est $x \mapsto \dfrac{j!}{(j-k)!}x^{j-k}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(e_j)\big)(x) = \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{(j-k)!}x^{j-k}$$

En posant $i = j - k$, on a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(e_j)\big)(x) = \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!}x^{i}$$

• On a d'autre part, d'après la question 5b) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\psi(e_j)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} t^j e^{-t}dt = e^x \times j!\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = j!\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!}x^i$$

On vient donc de montrer que, pour tout j de $[\![0,n]\!]$, on a : $\varphi(e_j) = \psi(e_j)$.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi = \psi}$$

b) Supposons qu'il existe un réel a tel que : $\forall x \geq a,\ P(x) \geq 0$. On a alors, pour tout t de $[x, +\infty[$, $P(t) \geq 0$ (car $t \geq x \geq a$).

En multipliant par $e^{-t} > 0$, on obtient : $P(t)e^{-t} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale ("bornes" évidemment dans l'ordre croissant : ce sont x et $+\infty$), on a :

$$\forall x \geq a,\ \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \geq 0$$

Comme $e^x > 0$, on en déduit :

$$\forall x \geq a,\ e^x\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \geq 0$$

Ceci veut dire :

$$\forall x \geq a,\ \big(\psi(P)\big)(x) \geq 0$$

Grâce à la question précédente, on peut remplacer ψ par φ, ce qui donne :

$$\forall x \geq a,\ \big(\varphi(P)\big)(x) \geq 0$$

En revenant à la définition de φ, on trouve bien :

$$\boxed{\forall x \geq a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0}$$