Maths ECS 2019 ....Éléments de correction

Exercice 1 ....

1) a) Après calculs, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ puis $A^2 - 3A + 2I = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{X^2 - 3X + 2 \text{ est un polynôme annulateur de } A}$$

b) Les racines de ce polynôme sont 1 et 2 donc 1 et 2 sont les valeurs propres possibles de A.

c) Le script nous enseigne que $\text{rg}(A - I) = 1$ et $\text{rg}(A - 2I) = 2$, ce qui permet de conjecturer que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A.
Avec la question 1b), on peut conjecturer :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{1, 2\}}$$

D'après le théorème du rang, on peut conjecturer que les dimensions des sous-espaces propres de f sont :

$$\boxed{\dim\big(\text{Ker}(f - Id)\big) = 3 - 1 = 2 \text{ et } \dim\big(\text{Ker}(f - 2Id)\big) = 3 - 2 = 1}$$

d) • On résout $(A - I)X = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui donne $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\text{Ker}(f - Id) = \text{Vect}\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$$

La famille $\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ est libre (deux vecteurs non proportionnels) et génératrice de $\text{Ker}(f - Id)$ donc c'est une base de $\text{Ker}(f - Id)$, ce qui confirme la dimension 2 trouvée plus haut.

$$\boxed{\text{Une base de } \text{Ker}(f - Id) \text{ est } \big((1,1,0),(0,1,1)\big)}$$

• On résout $(A-2I)X=0$, ce qui donne cette fois $X=\begin{pmatrix}0\\2z\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow X=z\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

On en déduit : $\mathrm{Ker}(f-2Id)=\mathrm{Vect}\big((0,2,1)\big)$.

La famille $\big((0,2,1)\big)$ est libre (un vecteur non nul) et génératrice de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$ donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$, ce qui confirme la dimension 1 trouvée plus haut.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Ker}(f-2Id) \text{ est } \big((0,2,1)\big)}$$

2) a) On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(f-Id))+\dim(\mathrm{Ker}(f-2Id))=3$ donc 1 et 2 sont bien les seules valeurs propres de *f* et *f* est diagonalisable. On sait qu'on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en concaténant des bases de $\mathrm{Ker}(f-Id)$ et de $\mathrm{Ker}(f-2Id)$.

Ainsi, la famille $\big((1,1,0),(0,1,1),(0,2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Comme (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$, alors il existe trois réels α, β et γ tels que $(a,b,c)=\alpha u_1+\beta v_1+\gamma v_2$,

On trouve par identification : $\begin{cases}\alpha = a\\ \gamma = b-a-c\\ \beta = 2c-b+a\end{cases}$.

Conclusion :

$$\boxed{x=\underbrace{au_1+(2c-b+a)v_1}_{\in\mathrm{Ker}(f-Id)}+\underbrace{(b-a-c)v_2}_{\in\mathrm{Ker}(f-2Id)}}$$

3) a) La diagonale de la matrice *D* est de la forme $(\lambda_1 \ldots \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p)$, avec un certain nombre de "λ_1", de "λ_2", …, de "λ_p".

La diagonale de la matrice $D-\lambda_1 I$ est donc : $(0 \ldots 0\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p)$, celle de $D-\lambda_2 I$ est $(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ 0 \ldots 0\, \lambda_3 \ldots \lambda_3 \ldots\ \lambda_p \ldots \lambda_p)$, et ainsi de suite jusqu'à la diagonale de $D-\lambda_p I$ qui est $(\lambda_1 \ldots \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots 0 \ldots 0)$. Comme le produit de matrices diagonales est obtenu en multipliant les coefficients diagonaux de chacune d'entre elles, il est certain que :

$$\boxed{(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)\ldots(D-\lambda_p I)=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

b) Le polynôme $(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_p)$ est donc annulateur de *D*, mais *D* est une matrice de *f* dans une certaine base donc :

$$\boxed{(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_p) \text{ est un polynôme annulateur de } f}$$

4) a) On trouve :

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}}$$

b) • Il faut noter tout d'abord que les L_k appartiennent à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

• Liberté : soit p réels $a_1,\ldots,a_p$ tels que $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k = 0$. Pour tout entier i de $[\![1, p]\!]$, si on évalue en λ_i, on obtient : $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k(\lambda_i) = 0$, soit $a_i = 0$.

Ainsi, la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est libre.

• Comme la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ contient p vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui est de dimension p, on peut conclure :

$$\boxed{(L_1, L_2, \ldots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$$

c) Tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ peut s'écrire $P = \sum_{i=1}^{p} a_i L_i$. En évaluant cette égalité en λ_k, on trouve : $P(\lambda_k) = a_k$. En remplaçant, on a bien :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k}$$

d) En appliquant la relation précédente au polynôme constant égal à 1, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k = 1}$$

5) a) On a, pour tout x de E :

$L_k(f)(x) =$

$$\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j}\right)\Big((f-\lambda_1 Id)\circ\ldots(f-\lambda_{k-1}Id)\circ(f-\lambda_{k+1}Id)\circ\ldots(f-\lambda_p Id)\Big)(x)$$

En appliquant $f-\lambda_k Id$ et en remarquant que $f-\lambda_k Id$ commute avec $f-\lambda_j Id$ on trouve par linéarité de $f-\lambda_k Id$:

$(f-\lambda_k Id)\,(L_k(f)(x)) =$

$$\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\left(\left(f-\lambda_1 Id\right)\circ\ldots\circ\left(f-\lambda_k Id\right)\circ\ldots\circ\left(f-\lambda_p Id\right)\right)(x)$$

D'après la question 3b), $(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_k)\ldots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de *f*, on obtient donc $\left(f-\lambda_k Id\right)\left(L_k\left(f\right)(x)\right)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in E,\ L_k\left(f\right)(x)\in \operatorname{Ker}\left(f-\lambda_k Id\right)}$$

b) En appliquant l'égalité $\sum_{k=1}^{p} L_k=1$ à l'endomorphisme *f*, on a : $\sum_{k=1}^{p} L_k\left(f\right)=Id$.

En appliquant cette nouvelle égalité à un vecteur *x* quelconque de *E*, on a cette fois :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k\left(f\right)(x)=x}$$

Ceci donne bien la décomposition de *x* sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}\left(f-\lambda_k Id\right)$, puisque, pour tout *k* de $[\![1,p]\!]$, on a vu que $L_k\left(f\right)(x)\in \operatorname{Ker}\left(f-\lambda_k Id\right)$.

6) Avec $n=3$, $E=\mathbb{R}^3$ et $p=2$, et comme $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$, on a :

$$L_1=-\left(X-2\right) \text{ et } L_2=X-1$$

D'après la question précédente, on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ x=L_1\left(f\right)(x)+L_2\left(f\right)(x)=\underbrace{-\left(f-2Id\right)(x)}_{\in\operatorname{Ker}(f-Id)}+\underbrace{\left(f-Id\right)(x)}_{\in\operatorname{Ker}(f-2Id)}$$

On vérifie alors que

- $-\left(f-2Id\right)(x)=\left(a,2a-b+2c,2c+a-b\right)=au_1+\left(2c-b+a\right)v_1$
- $\left(f-Id\right)(x)=\left(0,-2a+2b-2c,-a+b-c\right)=\left(b-a-c\right)v_2$.

Exercice 2 ....

Partie 1 : question préliminaire et présentation de 2 variables aléatoires X et T

1) a) Pour tout réel *x*, on a :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}'(x)=\frac{1}{x^2+1}}$$

b) On a :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}}$$

Pour tout réel x strictement positif, posons : $h(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve $h'(x)=0$ donc h est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et comme $h(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 s'écrit : $\operatorname{Arctan}(x)\underset{0}{=}x+o(x)$.
On a donc l'équivalent :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x)\underset{0}{\sim}x}$$

2) a) • La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ sans problème.

- La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ ($x^2+1>0$).
- Pour tout $A\geq 0$, on a : $\int_0^A f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(A)$.

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{Arctan}(A)=\frac{\pi}{2}$, on a la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ ainsi que sa valeur :

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

- La fonction f étant paire, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Par définition, on a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan}(x)-\lim_{B\to-\infty}\operatorname{Arctan}(B)\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan}(x)+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x)+\frac{1}{2}}$$

3) a) • Sur $\mathbb{R}_+^*$, g est bien définie et positive (car la fonction exp est positive) et sur $\mathbb{R}_-$, g est nulle donc positive ou nulle.

- La restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ est continue comme quotient bien défini de fonctions continues et la restriction de g à $\mathbb{R}_-$ est continue car nulle.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ est nulle car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

$\rightarrow$ Pour tout $a > 0$, on a :

$$\int_a^1 g(x)\,dx = \frac{1}{e} - e^{-1/a}$$

Ainsi, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{e}$.

$\rightarrow$ Pour tout $A \geq 1$, on a :

$$\int_1^A g(x)\,dx = e^{-1/A} - \frac{1}{e}$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut $1 - \frac{1}{e}$.

On peut conclure que $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : g peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Par définition, on a : $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$

On trouve alors :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

4) a) On a $F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right)$

Comme X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi que X, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\right)^n}$$

b) $Y_n = \frac{\pi}{n} M_n$ donc, pour tout réel x, on a : $G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right)$.

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n}$$

5) a) Pour tout x négatif ou nul, on a $G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$.

Comme x est négatif, on a $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) \le 0$.

On en déduit : $0 < \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par encadrement, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \le 0,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0}$$

b) D'après la question 1b), avec x strictement positif, on a :

$$\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n}$$

c) Pour tout x strictement positif, on peut écrire :

$$G_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)\right)$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right) = 0$, on a l'équivalent :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)$$

On en déduit :

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$$

Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{1}{x}$, on trouve donc :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-1/x}}$$

d) On constate, grâce aux questions 5a) et 5c), que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3 ....

1) a) Si u^* existe, on a, par orthonormalité de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^*(y), e_i \rangle e_i$$

Par définition de u^*, on a : $u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\langle y,u(e_i)\rangle e_i$ et enfin (symétrie du ps) :

$$\boxed{u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i),y\rangle e_i}$$

b) Pour chaque vecteur *y* de *E*, $u^*(y)$ est ainsi déterminé de façon unique. Par conséquent, si u^* existe, alors u^* est unique.

2) a) • Pour tout *y* de *E*, la relation $u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i),y\rangle e_i$ prouve que $u^*(y)\in E$.

• Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve assez vite :

$$u^*(y+az)=u^*(y)+au^*(z)$$

Conclusion :

$$\boxed{u^* \text{ est un endomorphisme de } E}$$

b) D'après les trois questions précédentes, l'endomorphisme u^* défini à la question 1a) est l'unique endomorphisme de *E* vérifiant :

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$$

3) Si *u* est un endomorphisme symétrique, alors :

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$$

Par unicité de u^*, on en déduit : $\forall y\in E,\ u^*(y)=u(y)$.

Conclusion : un endomorphisme symétrique est normal et il est son propre adjoint.

4) a) En appliquant la relation définissant u^*, mais en remplaçant *y* par $u(x)$, on obtient :

$$\forall x\in E,\ \|u(x)\|^2=\langle u(x),u(x)\rangle=\langle x,u^*(u(x))\rangle=\langle x,(u^*\circ u)(x)\rangle$$

Comme *u* est un endomorphisme normal, on a $u^*\circ u=u\circ u^*$, ce qui permet d'écrire, avec la symétrie du produit scalaire :

$$\forall x\in E,\ \|u(x)\|^2=\langle u(u^*(x)),x\rangle$$

Enfin, encore une fois par définition de u^*, on obtient :

$$\forall x\in E,\ \|u(x)\|^2=\langle u^*(x),u^*(x)\rangle=\|u^*(x)\|^2$$

Comme une norme est positive, on a bien :

$$\boxed{\forall x\in E,\ \|u(x)\|=\|u^*(x)\|}$$

b) On a les équivalences suivantes :

$$x\in \mathrm{Ker}(u)\Leftrightarrow u(x)=0\Leftrightarrow \|u(x)\|=0\Leftrightarrow \|u^*(x)\|=0\Leftrightarrow u^*(x)=0\Leftrightarrow x\in\mathrm{Ker}(u^*)$$

On peut conclure :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u)=\operatorname{Ker}(u^*)}$$

5) Soit x un vecteur de $F^{\perp}$. Montrons que $u^*(x)\in F^{\perp}$.
Par définition de l'adjoint, on a : $\forall y\in F$, $\langle u^*(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$.
Comme $u(y)\in F$ et comme x est un vecteur de $F^{\perp}$, on a $\langle x,u(y)\rangle=0$. On en déduit : $\forall y\in F$, $\langle u^*(x),y\rangle=0$.
Cette égalité prouve que $u^*(x)$ appartient à $F^{\perp}$.
On peut donc conclure que $F^{\perp}$ est stable par u^*.

6) a) Soit x un vecteur de E_λ. On a, par définition de E_λ : $u(x)=\lambda x$.
En appliquant u^* à la relation $u(x)=\lambda x$, et comme $u\circ u^*=u^*\circ u$, on obtient après quelques étapes : $u(u^*(x))=\lambda u^*(x)$.
Ceci prouve que $u^*(x)\in E_\lambda$
Conclusion :

$$\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^*}$$

b) $(u^*)^*$ est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u^*(x),y\rangle=\langle x,(u^*)^*(y)\rangle$$

Mais, par définition de u^*, on a :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u^*(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$$

Par unicité de l'adjoint de u^*, on a : $(u^*)^*=u$.
Grâce à la question 5), comme E_λ est stable par u^*, alors $E_\lambda^{\perp}$ est stable par $(u^*)^*$, c'est-à-dire stable par u.
Conclusion :

$$\boxed{E_\lambda^{\perp} \text{ est stable par } u}$$

Problème ....

Partie 1

1) Comme $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, on obtient :

$$\boxed{G(1)=1}$$

2) Comme $G(t)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)t^k$, on a, par linéarité de la dérivation :

$$G'(t)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)kt^{k-1}$$

En prenant $t=1$, on trouve : $G'(1)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=E(X)$

3) En dérivant encore une fois, on a $G''(t)=\sum_{k=2}^{n} P(X=k)k(k-1)t^{k-2}$ et on trouve : $G''(1)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)$. On en déduit : $G''(1)=E(X^2-X)$ et, par linéarité de l'espérance : $G''(1)=E(X^2)-E(X)$.
Comme $E(X)=G'(1)$, on arrive, grâce au théorème de Koenig-Huygens, à :

$$\boxed{V(X)=G''(1)+G'(1)-\left(G'(1)\right)^2}$$

Partie 2
4) a) On sait que, pour tout entier naturel *k* non nul, on a :

$$\ln(k+1)-\ln k=\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt$$

De plus, pour tout t de $[k,k+1]$, on a $\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{k}$. En intégrant ces fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant, on obtient bien :

$$\boxed{\frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln k\leq\frac{1}{k}}$$

b) En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ (avec $n\geq 2$), on trouve, après simplification de la somme du milieu (télescopage) :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq\ln n\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Après changement d'indice et "recentrage", on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln n+\frac{1}{n}\leq u_n\leq\ln n+1}$$

c) En divisant tout par $\ln n>0$ dès que $n\geq 2$, on trouve :

$$1+\frac{1}{n\ln n}\leq\frac{u_n}{\ln n}\leq 1+\frac{1}{\ln n}$$

On en déduit, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln n}=1$.
Conclusion :

$$\boxed{u_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n}$$

5) La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles d'une série de Riemann convergente (de paramètre $2>1$) donc, par définition de la convergence d'une série :

$$\boxed{\text{La suite } (h_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$$

Partie 3

6) On peut proposer le script suivant :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
A=1:n
p=n
for k=1:n
    j=grand(1,1,'uin',1,p)
    aux=A(j)
    A(j)=A(p)
    A(p)=aux
    p=p-1
end
disp(A)
```

7) a) À la fin du script, la variable `m` contiendra la plus grande valeur du vecteur `A`, à savoir n.

b) La variable `c` contiendra, en fin de script, la place du nombre n dans le vecteur `A`.

c) Sachant maintenant que `c` contient la place du nombre n, on peut proposer :

```
c=find(A==n)
disp(c)
```

8) Si $n=1$, le vecteur `A` ne contient qu'un élément donc il n'y a pas de boucle `for` et la variable `c` reste égale à 1.

$$\boxed{X_1 \text{ est la variable certaine égale à } 1}$$

9) a) Comme la variable `c` a au minimum une affectation (`c=1`), et comme `c` peut changer de valeur entre 0 et $n-1$ fois dans la boucle (au maximum une fois par passage dans la boucle si le vecteur de départ est `A=1:n`), on a :

$$\boxed{X_n(\Omega)=[\![1,n]\!]}$$

b) • L'événement $(X_n = 1)$ est réalisé lorsque la variable informatique `A(1)` contient l'entier n. L'entier n étant fixé en première position, il reste $(n-1)!$ façons de placer les autres pour fabriquer une permutation de $[\![1,n]\!]$ donc il y a $(n-1)!$ permutations dans lesquelles n est en première position. Ainsi :

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}$$

• L'événement $(X_n = n)$ est réalisé lorsque le vecteur `A` est le vecteur `1:n`, On a donc :

$$\boxed{P(X_n = n) = \frac{1}{n!}}$$

• On sait que $X_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$, et avec ce qui précède, on a $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ donc X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.

• On sait que $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$, et avec ce qui précède, on a $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(X_3 = 3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$. On en déduit $P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

c) Pour tout n supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$ s'écrit :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(X_n = j) = P(A_n = n) P_{(A_n=n)}(X_n = j) + P(A_n < n) P_{(A_n<n)}(X_n = j)$$

• On a $P(A_n = n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, d'où $P(A_n < n) = \frac{n-1}{n}$.

• Ensuite, sachant que $(A_n = n)$ est réalisé, on est certain qu'il y aura un changement de contenu de la variable `c` au dernier tour de la boucle, donc pour réaliser $(X_n = j)$, c'est-à-dire avoir j affectations de la variable `c` en tout, il faut et il suffit que l'on ait $j-1$ affectations de `c` avant le dernier tour (ce qui nécessite $j \geq 2$ car il y a toujours l'affectation initiale avant la boucle) : tout se passe alors comme si on travaillait avec un vecteur initial de $n-1$ éléments (tous sauf l'entier n), pour lequel le nombre d'affectations de la variable `c` serait une variable aléatoire Y_{n-1}, qui a bien sûr même loi que X_{n-1} et qui doit prendre la valeur $j-1$. On peut conclure :

$$P_{(A_n=n)}(X_n = j) = P(Y_{n-1} = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$$

- Pour finir, sachant que $(A_n < n)$ est réalisé, on est certain qu'il n'y aura pas de changement de contenu de la variable `c` au dernier tour de la boucle, donc pour réaliser $(X_n = j)$, c'est-à-dire avoir *j* affectations de la variable `c` en tout, il faut et il suffit que l'on ait j affectations de `c` avant le dernier tour : tout se passe alors comme si on travaillait avec un vecteur initial de $n-1$ éléments (tous sauf celui qui est en position *n* dans le vecteur `A`), pour lequel le nombre d'affectations de la variable c serait une variable aléatoire Z_{n-1}, qui a bien sûr même loi que X_{n-1} et qui doit prendre la valeur j. On peut conclure :

$$P_{(A_n<n)}(X_n = j) = P(Z_{n-1} = j) = P(X_{n-1} = j)$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall j \in [\![2,n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j)}$$

d) On sait que $X_4(\Omega) = [\![1,4]\!]$, et avec la question 9b), on a :

$$P(X_4 = 1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_4 = 4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Avec la question 9c), en faisant $n = 4$, on obtient :

$$P(X_4 = 2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{24}$$

On trouve enfin :

$$P(X_4 = 3) = \frac{1}{4}$$

10) a) Pour $j = 1$ l'égalité obtenue à la question 8c) s'écrit :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = 0) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = 1)$$

D'après la question 8b), ceci donne : $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = 0) + \frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$.

Comme $P(X_{n-1} = 0) = 0$ car il y a au moins la 1re affectation, on obtient $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$, ce qui est correct, et l'égalité de la question 9c) est valable pour tout *j* de $[\![1,n]\!]$.

b) On multiplie les deux membres de l'égalité obtenue à la question 9c) par t^j :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(X_n = j)t^j = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j)t^j$$

On somme pour *j* allant de 1 à *n* :

$$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)t^j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_{n-1} = j)t^j$$

En simplifiant ce qui l'est :

$$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)t^j = \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)t^j$$

Après changement d'indice et mise en facteur de t dans la 1re somme de droite, on trouve :

$$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j)t^j = \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n-1} P(X_{n-1} = i)t^i + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)t^j$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t)}$$

c) Par récurrence immédiate, on trouve facilement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(t) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)}$$

11) En dérivant la relation $(*)$ puis en évaluant en 1, on trouve, d'après les questions 1) et 2) :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n}}$$

En écrivant $E_k - E_{k-1} = \frac{1}{k}$ et en sommant pour k allant de 2 à n (avec $n \geq 2$) on trouve : $E_n - E_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

Comme $E_1 = E(X_1) = 1$, on obtient : $E_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ceci restant valable pour $n = 1$ (ça donne $1 = 1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n}$$

12) a) En dérivant une deuxième fois la relation $(*)$ et en évaluant en 1, on obtient cette fois (pour $n \geq 2$) :

$$G_n''(1) = V_n - u_n + u_n^2$$

On trouve de même $G_{n-1}''(1) = V_{n-1} - u_{n-1} + u_{n-1}^2$, et en remplaçant dans l'égalité $G_n''(1) = \frac{2}{n}u_{n-1} + G_{n-1}''(1)$, on obtient après calculs et simplifications :

$$\boxed{\forall n \geq 2, V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

b) En écrivant $V_k - V_{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$ et en sommant encore une fois pour k allant de 2 à n (avec $n \geq 2$), on obtient : $\forall n \geq 2$, $V_n - V_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Comme on a $V_1 = 0$, il vient :

$$\forall n \geq 2 \text{ , } V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Finalement, on trouve :

$$\forall n \geq 2, \ V_n = u_n - h_n$$

Pour $n = 1$, ceci donne $V_1 = u_1 - h_1 = 1 - 1 = 0$, ce qui est correct, et ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ V_n = u_n - h_n}$$

c) Pour tout $n \geq 2$, on a $\ln n > 0$ donc : $\frac{V_n}{\ln n} = \frac{u_n}{\ln n} - \frac{h_n}{\ln n}$.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$, et comme (h_n) est convergente, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V_n}{\ln n} = 1$

Conclusion :

$$\boxed{V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$$