

RAPPORT

295 - MATHÉMATIQUES APPROFONDIES, EM Lyon

2026

1 - Le sujet

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants, le premier étant un petit peu plus court que le second, représentant respectivement 42% et 58% des points du sujet, hors bonus de présentation.

Le premier problème est un problème transverse d'algèbre bilinéaire et d'analyse. La première partie vise à obtenir le maximum global d'une fonction de deux variables qui est en fait un cas particulier d'un résultat démontré en partie deux.

Le second problème est un problème de probabilités discrètes, plus précisément sur une marche aléatoire, nécessitant l'introduction de certains outils analytiques comme le produit de Cauchy de deux séries ou la notion de fonction génératrice. On profite de ce problème pour proposer quelques questions de programmation en Python : simulation de variables aléatoires et interprétation.

Au final, le sujet balaie une bonne partie du programme de première et deuxième année.

Toutes les questions du sujet sont accessibles avec les outils du programme et ont toutes été (au moins une fois) traitées correctement.

Les membres de l'équipe de correction signalent que le sujet était relativement difficile car les questions moins guidées qu'elles ne l'ont pu être par le passé. Si l'équipe de conception prend note de toutes les remarques et en tiendra compte dans l'avenir, il est à noter que cette épreuve a parfaitement rempli son objectif : trier tous les candidats.

Il s'avère que, malgré un excellent travail des cobayeurs, l'énoncé d'une question était erroné. Le bénéfice a donc été naturellement au profit de tous les candidats qui ont tenté de traiter cette question et cette erreur regrettable n'aura eu aucun impact.

Certains membres du jury suggèrent de réfléchir à un format qui proposerait davantage d'exercices, plus courts, de sorte à évaluer les candidats sur encore plus de notions. Tous les formats restent possibles.

2 - Barème et statistiques

Chaque question est notée, en fonction de sa longueur, du nombre d'arguments à donner et de sa difficulté sur un nombre de points variant de 1 à 4, puis coefficientée, pour atteindre un premier total de 300 points. Une péréquation finale est opérée afin de convertir toutes les notes sur 20.

Après péréquation, les statistiques de l'épreuve sont (sur 3029 copies) :

X Moyenne (sur 20) : 11.95

✗ **Écart-type** (sur 20) : 4.47

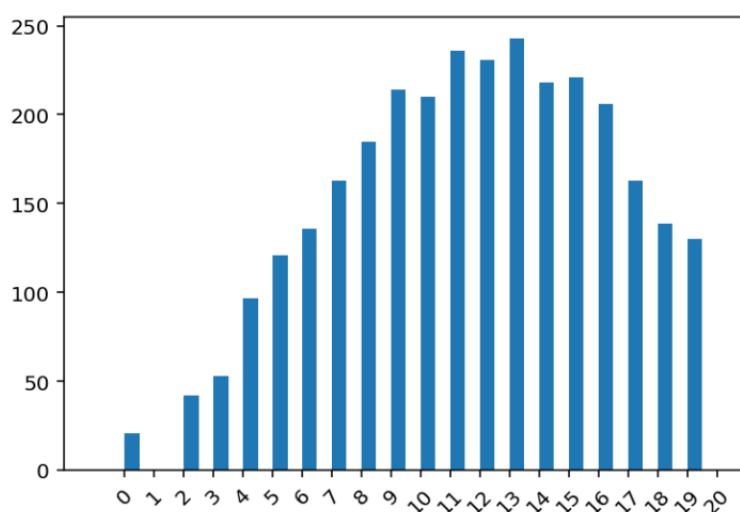
✗ **Nombre de 20/20** : 37.

La copie avec le score maximal a obtenu 264 points et bien entendu la note finale de 20/20.

Mais toutes les copies avec un score supérieur ou égal à 212 ont également obtenu cette même note. Le tableau suivant renseigne sur quelques exemples de conversion sur 20.

Score sur 300	Note sur 20
26	5.99
70	9.93
82	10.9
146	16.03
175	18.08
212	20

La distribution des notes est la suivante :



3 - Les attentes du jury

Cette épreuve de mathématiques approfondies a pour but de permettre aux candidats qui ont travaillé sérieusement pendant les deux ans de leur préparation de témoigner d'une maîtrise des notions du programme (nature des objets manipulés, énoncés précis des théorèmes qui structurent le cours, techniques classiques), de leur capacité à mener des calculs, parfois abstraits et à comprendre des notations, et ce qu'on essaie de leur faire faire. L'objectif est de valoriser au maximum les candidats qui ont fait des efforts en suivant ce cours exigeant et ambitieux.

Dans la majorité des questions, les résultats à démontrer sont donnés, de sorte à n'être jamais bloquants pour la suite. On peut les admettre et s'en servir dans les autres questions, si besoin. On encourage d'ailleurs tous les candidats à s'accrocher et à lire toutes les questions, pour aller chercher le moindre point.

On attend donc des arguments rigoureux et un véritable raisonnement, en citant (et vérifiant) les conditions d'un théorème si on les utilise.

Il est capital que les étapes de calcul soient justifiées au bon moment. Hélas, en écrivant plusieurs fois un argument, notamment mal utilisé, on perd la crédibilité. Par exemple, on évitera d'écrire

$$\mathbf{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \dots + \mathbf{E}(X_n)$$

"par indépendance" des X_i puis utiliser le même argument pour la variance, ce qui traduit que le candidat ne sait pas à quel moment cette indépendance est nécessaire.

Il est capital de lire les questions dans leur intégralité. Dans la toute première question du sujet, une partie non négligeable des candidats obtient les bonnes valeurs propres, mais ne les présente pas - alors que c'est

explicitement écrit dans l'énoncé de la question - dans l'ordre décroissant, perdant ainsi des points faciles.

On voit encore trop de candidats effectuer des calculs faux et arriver comme par magie au bon résultat. C'est de bonne guerre mais pas forcément à l'avantage de ces candidats.

Concernant l'informatique, les énoncés sont établis dans le cadre du programme et compréhensibles dans le cadre de celui-ci et une réponse dans ce même cadre est possible et c'est celle qu'on attend *a priori*.

En revanche, tout candidat qui sait programmer n'a pas à se restreindre à une réponse dans le cadre du programme et, contrairement aux maths, une réponse correcte, même hors programme, est complètement validée.

4 - Remarques et conseils aux candidats

Comme précisé dans le barème, des points sont attribués à la présentation, la lisibilité et la clarté des raisonnements. Si la plupart des copies sont (devenues de plus en plus) soignées, un (petit; mais pas si petit) nombre de copies restent hélas très peu présentables voire illisibles par moment, ce qui est très préjudiciable pour le candidat.

On ne rature pas ; on raye proprement à la règle (en précisant de ne pas tenir compte), et pas sur la page de garde.

S'il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir une bonne note, et qu'on peut d'ailleurs laisser de la place pour une question, quitte à y revenir plus tard, on demande à ce que les questions soient traitées dans l'ordre.

Certaines copies courtes (moins de 16 pages) obtiennent des notes très honorables, quand d'autres très longues (plus de 30 pages) décrochent péniblement quelques points : il ne sert à rien de vouloir traiter la totalité du sujet si aucun raisonnement ni calcul ne tient la route. Il est bien plus payant de prendre son temps et de traiter très soigneusement les questions que l'on choisit d'aborder.

Parmi les commentaires des membres du jury, certains reviennent très souvent. En voici une sélection.

- ✗ Il ne faut pas confondre la conjonction de coordination "or" permettant d'introduire un argument avec la préposition "hors" qui indique l'extériorité par rapport à un lieu.
- ✗ Le nom commun théorème est masculin. On parle donc du théorème spectral et non théorème spectrale ou pire théorème *spectrally*.
- ✗ Une matrice orthogonale n'est pas une matrice dont les colonnes sont orthogonales ! Il faut les normaliser ! Trop peu de candidats répondent complètement correctement à cette question facile qui pouvait rapporter beaucoup de points.
- ✗ Un quotient de fonctions polynomiales n'est pas une fonction polynomiale. On pensera d'ailleurs à préciser que le dénominateur ne s'annule pas sur le domaine d'étude. Tout comme (la somme d') une série infinie de termes de la forme $a_n t^n$ n'est pas une fonction polynômiale !
- ✗ Beaucoup de candidats font un peu vite la confusion entre $(x, y) \neq (0, 0)$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$ lors de la résolution du système.
- ✗ Peu de candidats ont remarqué que l'on manipule des matrices qui ne sont pas nécessairement carrées. Attention par ailleurs à écrire des égalités entre objets de même nature (une matrice n'est pas égale à un nombre). La graphie de certains candidats permet d'entretenir (à dessein ?) un flou sur ce qui est un m et ce qui est un n , pas forcément au bénéfice des candidats.
- ✗ Oubli fréquent de préciser que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale, pour en déduire avec $P = {}^t$ que π est un endomorphisme symétrique.
- ✗ Attention au choix des notations, parfois très malheureuses. On lit trop souvent "Soit $X \in \text{Ker}({}^t X)$..."
- ✗ Pour les questions de convergence de séries, il est pertinent d'utiliser les outils de comparaison. Il faut néanmoins comparer les termes généraux des séries et pas les séries elles-mêmes.
- ✗ Certains candidats ne font pas la différence entre la croissance de la fonction G_W et la croissance de la suite des sommes partielles de la série qui définit G_W et on revient à une remarque précédente ; il faut se poser les bonnes questions concernant la nature des objets manipulés.

- ✗ Il y a parfois confusion entre théorème de la limite monotone et théorème des bornes atteintes.
- ✗ On voit trop souvent $(2n)! = 2 \times (n!)$. La notation factorielle a un sens, il ne faut pas l'oublier quand on teste des formules de ce type...
- ✗ Il est fréquent de voir des intersections de probabilités ou des sommes d'événements ce qui n'a bien sûr pas de sens. Il ne faut pas confondre les opérations entre événements (intersection et réunion) avec les opérations sur les probabilités (produit et somme). Il convient également de justifier également (quand cela s'applique) la raison pour laquelle la probabilité d'une réunion est égale à la somme des probabilités (les événements sont disjoints deux-à-deux) ou la probabilité de l'intersection des événements est égale au produit des probabilités (les événements sont mutuellement indépendants).
- ✗ Des candidats se perdent dans d'interminables explications verbeuses. Rappelons au passage qu'un exemple n'a pas valeur de généralité.
- ✗ L'argument d'indépendance est régulièrement oublié dans la justification du fait que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2}$ suit une loi binomiale.

On conclura par un dernier conseil. Même si l'épreuve est longue et qu'elle parait difficile, il y a toujours des questions accessibles à aller chercher dans le sujet. Il faut s'accrocher et tout faire pour bien traiter ces questions qui peuvent finalement rapporter pas mal de points.