PREMIER PROBLÈME

1. a. Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, f_n est une application polynômiale.

• Cela semble relativement clair pour $n = 0$ puisque $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1$.

• Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$, f_n soit une application polynômiale. Montrons qu'il en est de même pour f_{n+1}.

f_n est une application polynômiale donc $h_n : t \to f_n(t) + f_n(t^2)$ aussi. Ainsi $x \to \displaystyle\int_0^x \Big(f_n(t) + f_n(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t$ est également une application polynômiale car c'est la primitive de h_n sur l'intervalle I qui prend la valeur 0 en 0.

Alors $f_{n+1} : x \to 1 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x \Big(f_n(t) + f_n(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t$ est encore une application polynômiale et ainsi s'achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ f_n \text{ est une application polynômiale.}}$$

b. $\forall x \in I,\ f_1(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x \big(f_0(t) + f_0(t^2)\big)\,\mathrm{d}t = 1 + \dfrac{1}{2} \int_0^x 2\,\mathrm{d}t = 1 + \dfrac{1}{2}\ (2x) = 1 + x.$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_1(x) = 1 + x.}$$

$\forall x \in I,\ f_2(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x \big(f_1(t) + f_1(t^2)\big)\,\mathrm{d}t = 1 + \dfrac{1}{2} \int_0^x (1 + t + 1 + t^2)\,\mathrm{d}t = 1 + \dfrac{1}{2} \left[2t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}\right]_0^x.$

$\forall x \in I,\ f_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6}.$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}.}$$

$\forall x \in I,\ f_3(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x \big(f_2(t) + f_2(t^2)\big)\,\mathrm{d}t = 1 + \dfrac{1}{2} \int_0^x \left(1 + t + \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t^3}{6} + 1 + t^2 + \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^6}{6}\right)\mathrm{d}t.$

$\forall x \in I,\ f_3(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \left[2t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{5t^3}{12} + \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^5}{20} + \dfrac{t^7}{42}\right]_0^x.$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^3}{24} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{84}.}$$

2. Notons que I est un <u>segment</u> et qu'ainsi toute application continue de I dans $\mathbb{R}$, possède un maximum (et un minimum).

Ainsi, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on a encore : $D_n = \operatorname*{Max}_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ ($|f_n - f_{n-1}|$ est continue sur I...).

a. $D_1 = \underset{x\in I}{\text{Max}}\,|f_1(x) - f_0(x)| = \underset{x\in I}{\text{Max}}\,|1 + x - 1| = \underset{x\in I}{\text{Max}}\,|x| = \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{D_1 = \frac{1}{2}\cdot}$$

$D_2 = \underset{x\in I}{\text{Max}}\,|f_2(x) - f_1(x)| = \underset{x\in I}{\text{Max}}\left|1 + x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6} - 1 - x\right| = \underset{x\in I}{\text{Max}}\left|\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6}\right| = \underset{x\in I}{\text{Max}}\left|\dfrac{x^2}{6}\left(x + \dfrac{3}{2}\right)\right|.$

Si x est dans I, $\dfrac{x^2}{6}\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ est un réel positif ; donc $D_2 = \underset{x\in I}{\text{Max}}\left[\dfrac{x^2}{6}\left(x + \dfrac{3}{2}\right)\right] = \underset{x\in I}{\text{Max}}\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6}\right).$

Dès lors étudions rapidement la fonction u définie par : $\forall x \in I, u(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6}\cdot$

u est dérivable sur I et $\forall x \in I, u'(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x}{2}(1 + x)$. Donc si x est dans I, $u'(x)$ est du signe de x.

Ainsi u est décroissante sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Remarquons que $u\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$ et $u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\cdot$

Ce qui précède donne alors : $\underset{x\in I}{\text{Max}}\, u(x) = \dfrac{1}{12}$ et donc

$$\boxed{D_2 = \frac{1}{12}\cdot}$$

b. Afin de ne pas refaire $\boxed{\text{quatre fois la même démonstration}}$ (au niveau de Q2 b, Q4 a, Q4 c et Q7) je propose d'établir le lemme suivant.

Soit g une application continue du segment $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$. Posons $M = \underset{x\in I}{\text{Max}}\,|g(x)|$.

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \left|\int_y^x \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M|x - y| \quad (1).$$

$$\forall x \in I,\ \left|\int_0^x \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M \quad (2).$$

<u>Démonstration du lemme</u>.

$\forall t \in I,\ t^2 \in I$. Donc : $\forall t \in I,\ |g(t) + g(t^2)| \leqslant |g(t)| + |g(t^2)| \leqslant 2M$.

Soit x et y deux éléments de I.

Si $y \leqslant x$: $\left|\displaystyle\int_y^x \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_y^x \Big|g(t) + g(t^2)\Big|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_y^x 2M\,\mathrm{d}t \leqslant 2M(x - y) = 2M|x - y|.$

Si $y > x$: $\left|\displaystyle\int_y^x \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\displaystyle\int_x^y \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_x^y \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right|$ et nous sommes ramenés au cas précédent et (1) est alors prouvé.

Soit x un élément de I. (1) donne sans difficulté : $\left|\displaystyle\int_0^x \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M|x - 0| = 2M|x|.$

Comme x est dans I : $2|x| \leqslant 1$. Par conséquent : $\left|\displaystyle\int_0^x \Big(g(t) + g(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M.$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit x un élément de I.

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left|1 + \frac{1}{2}\int_0^x \Big(f_n(t) + f_n(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t - 1 - \frac{1}{2}\int_0^x \Big(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right|.$$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^x \Big[\big(f_n - f_{n-1}\big)(t) + \big(f_n - f_{n-1}\big)(t^2)\Big]\,\mathrm{d}t\right|.$$

Rappelons que $f_n - f_{n-1}$ est continue sur I et que $\underset{x\in I}{\mathrm{Max}}\,|f_n(x) - f_{n-1}(x)| = D_n$.

En appliquant le point 2 du lemme à $|f_n - f_{n-1}|$ il vient : $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,D_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,D_n.}$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Nous venons de voir que : $\forall x \in I,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,D_n$.

Par conséquent $D_{n+1} = \underset{x\in I}{\mathrm{Max}}\,|f_{n+1} - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,D_n$.

Résumons : $D_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\,D_n$. Une récurrence des plus banales donne alors :

$$\boxed{\forall n \in N^*,\ D_n \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot}$$

d. $\forall n \in N^*,\ 0 \leqslant D_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

La convergence de la série de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(|\frac{1}{2}| < 1\,!)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } D_n \text{ converge.}}$$

Soit x un élément de I. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqslant D_n$.

La convergence de la série de terme général D_n et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ converge.

Pour tout élément x de I, la série de terme général $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ est absolument convergente donc convergente.

3. Soit x un élément de I.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\Big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\Big) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x) - 1.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\Big) + 1.$

Comme la série de terme général $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ converge, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\Big)$ converge également. Il est alors clair que :

$$\boxed{\text{la suite } \Big(f_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

4. Ici encore si n est dans $\mathbb{N}$, $M_n = \operatorname*{Max}_{x\in I} |f_n(x)|$ (car $|f_n|$ est continue sur le segment I).

a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall x \in I,\ |f_n(x)| = \left|1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \Big(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\left|\displaystyle\int_0^x \Big(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right|.$

En appliquant le point 2 du lemme à f_{n-1} il vient alors : $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\ M_{n-1}$.

Alors $M_n = \operatorname*{Max}_{x\in I} |f_n(x)| \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\ M_{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n \leqslant 1 + \frac{1}{2}\ M_{n-1}.}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $M_n \leqslant 2$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$ car M_0 vaut 1 puisque $f_0 = 1$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de N et montrons la pour $n+1$. $M_{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\ M_n$. Comme, par hypothèse $M_n \leqslant 2 : M_{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$ et ainsi s'achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M_n \leqslant 2\cdot}$$

c. Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, x et y deux éléments de I.

$|f_n(x) - f_n(y)| = \left|1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \Big(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t - 1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^y \Big(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right|.$

$|f_n(x) - f_n(y)| = \dfrac{1}{2}\left|\displaystyle\int_y^x \Big(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right|.$

En appliquant le point 1 du lemme à f_{n-1} il vient : $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\ 2M_{n-1}|x-y| = M_{n-1}\,|x-y|$.

Or $M_{n-1} \leqslant 2$ donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2\,|x-y|$.

Notons que cette dernière inégalité vaut encore pour $n = 0$ car $f_0 = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in\ I^2,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2\,|x-y|.}$$

5. a. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in\ I^2,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2\,|x-y|$. En faisant tendre n vers l'infini on obtient sans difficulté :

$$\boxed{\forall (x,y) \in\ I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 2\,|x-y|.}$$

b. Soit a un élément de I. $\forall x \in\ I,\ |f(x)-f(a)| \leqslant 2\,|x-a|$.

$\lim\limits_{x\to a} |x-a| = 0$ donne alors $\lim\limits_{x\to a} |f(x)-f(a)| = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

f est continue en a et ceci pour tout élément a de I.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$$

6. a. Soient x un élément de I, n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \Big(f_k(x) - f_{k-1}(x)\Big)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \Big|f_k(x) - f_{k-1}(x)\Big|.$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} D_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right).$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right).}$$

b. $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$ En faisant tendre p vers l'infini on obtient sans difficulté :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot}$$

7. Soit x un élément de I.

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \Big(f_n(t) + f_n(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = f(x)$.

Ainsi pour montrer que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \Big(f(t) + f(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t$ il suffit de prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^x \Big(f_n(t) + f_n(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^x \Big(f(t) + f(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Montrons pour cela que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^x \Big[\Big(f_n - f\Big)(t) + \Big(f_n - f\Big)(t^2)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t\right) = 0.$

Soit n un élément de N^*. $f_n - f$ est continue sur I.

Le point 2 du lemme appliqué à cette application donne alors :

$$\left|\int_0^x \Big[\Big(f_n - f\Big)(t) + \Big(f_n - f\Big)(t^2)\Big]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \operatorname*{Max}_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \operatorname*{Max}_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|.$$

Or $\forall x \in\ I,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$ Donc $\left|\displaystyle\int_0^x \Big[\Big(f_n - f\Big)(t) + \Big(f_n - f\Big)(t^2)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ fournit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^x \Big[\Big(f_n - f\Big)(t) + \Big(f_n - f\Big)(t^2)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t\right) = 0$ et achève de montrer que :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \Big(f(t) + f(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t.}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I : Etude d'un exemple

1. E est de dimension 3 donc pour montrer que la famille de trois vecteurs $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est une base de E il suffit de montrer que c'est une famille libre.

$f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$. $f^2(e_1) = f\big(f(e_1)\big) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$ car $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient α, β et γ trois éléments de $\mathbb{C}$ tels que : $\alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma f^2(e_1) = 0_E$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2 - 2e_3) + \gamma(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = 0_E$ donc $(\alpha + \beta - \gamma)e_1 + (\beta - 2\gamma)e_2 + (-2\beta + 2\gamma)e_3 = 0_E$.

La liberté de (e_1, e_2, e_3) donne alors $\alpha + \beta - \gamma = \beta - 2\gamma = -2\beta + 2\gamma = 0$.

Ainsi $\gamma = \beta = 2\gamma$ et $\alpha + \beta - \gamma = 0$. Nécessairement $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = -\beta + \gamma = 0$. Finalement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) \text{ est une base de } E.}$$

Cherchons la matrice de f dans cette base.

$f(e_1) = 0.e_1 + 1.f(e_1) + 0.f^2(e_1)$ et $f^2(e_1) = 0.e_1 + 0.f(e_1) + 1.f^2(e_1)$.

$f\big(f^2(e_1)\big) = f(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 + e_2$ car $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f\big(f^2(e_1)\big) = -e_1 + e_2 = -e_1 - (e_1 + e_2 - 2e_3) - (-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1)$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) \text{ est : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2. Montrons que f est cyclique d'ordre 4.

- $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$; alors $f^4(e_1) = -f(e_1) + f(e_2) = -(e_1 + e_2 - 2e_3) + (2e_1 + e_2 - 2e_3) = e_1$.
- $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big)$ est une famille génératrice de E comme sur-famille de la famille génératrice

$\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ de E. En effet $E = \text{Vect}\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) \subset \text{Vect}\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) \subset E$ donne $\text{Vect}\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) = E$ n'est-il pas ?

- $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) = (e_1, e_1 + e_2 - 2e_3, -e_1 - 2e_2 + 2e_3, -e_1 + e_2)$;

la famille$\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big)$ est donc constituée d'éléments deux à deux distincts.

Les trois points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre 4 et } \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) \text{ est un cycle de } f.}$$

3. Pour montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$ il suffit de prouver que ces deux endomorphismes de E coïncident sur la base $\Big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\Big)$ de E. Pour cela il suffit de prouver que $f^4(e_1) = e_1$, $f^5(e_1) = f(e_1)$ et $f^6(e_1) = f^2(e_1)$.

$f^4(e_1) = e_1$ résulte de Q1 et permet d'écrire que : $f\big(f^4(e_1)\big) = f(e_1)$ et $f^2\big(f^4(e_1)\big) = f^2(e_1)$; alors $f^5(e_1) = f(e_1)$ et $f^6(e_1) = f^2(e_1)$. Ainsi :

$$\boxed{f^4 = \mathrm{id}_E.}$$

4. Observons que $f^4 - id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont l'ensemble des racines est $\{1, -1, i, -i\}$.

Les seules valeurs propres possibles de f sont 1, -1, i et $-i$.

Notons $\mathcal{B}'$ la base $\Big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\Big)$ de E et A' la matrice de f dans cette base. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit x un élément de E de coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}'$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = \alpha \\ \alpha - \gamma = \beta \\ \beta - \gamma = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = 2\alpha \\ 2\alpha + \alpha = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$$

Donc 1 n'est pas valeur propre de f.

$$f(x) = -x \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = -\alpha \\ \alpha - \gamma = -\beta \\ \beta - \gamma = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Alors -1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est SEP $(f, -1) = \mathrm{Vect}\,\big(e_1 + f^2(e_1)\big)$.

Observons que $\mathrm{Vect}\,\big(e_1 + f^2(e_1)\big) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_1 - 2e_2 + 2e_3) = \mathrm{Vect}(-2e_2 + 2e_3) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$.

$$f(x) = ix \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = i\alpha \\ \alpha - \gamma = i\beta \\ \beta - \gamma = i\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = \frac{1}{i}(\alpha - \gamma) = -i(\alpha + i\alpha) = (1-i)\alpha \\ (1-i)\alpha + i\alpha = i(-i\alpha) = \alpha \end{cases}.$$

$$f(x) = ix \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = (1-i)\alpha \\ \alpha = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = (1-i)\alpha \end{cases}.$$

Alors i est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est SEP $(f, i) = \mathrm{Vect}\,\big(e_1 + (1-i)f(e_1) - if^2(e_1)\big)$.

Or $e_1 + (1-i)f(e_1) - if^2(e_1) = e_1 + (1-i)(e_1 + e_2 - 2e_3) - i(-e_1 - 2e_2 + 2e_3)) = 2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3$.

Par conséquent SEP $(f, i) = \mathrm{Vect}\,\big(2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3\big)$.

Remarquons alors que si X est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, $A'X = -iX \Leftrightarrow A'\overline{X} = i\overline{X}$ puisque A' est à coefficients réels.

Ainsi $f(x) = -ix \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\gamma} = -i\overline{\alpha} \\ \overline{\beta} = (1-i)\overline{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = i\alpha \\ \beta = (1+i)\alpha \end{cases}$. Alors $-i$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est SEP $(f,-i) = \text{Vect}\Big(e_1 + (1+i)f(e_1) + if^2(e_1)\Big) = \text{Vect}\Big(2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3\Big)$.

f admet trois valeurs propres distinctes et E est de dimension 3 donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Comme SEP $(f,-1) = \text{Vect}\big(e_2 - e_3\big)$, SEP $(f,i) = \text{Vect}\Big(2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3\Big)$ et SEP $(f,-i) = \text{Vect}\Big(2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3\Big)$:

$\big(e_2 - e_3, 2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3, 2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3\big)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres 1, i et $-i$.

Partie II Cas général

1. $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est un cycle de f donc c'est une famille génératrice de E. Cette famille génératrice est de cardinal p et E est de dimension n, par conséquent :

$$\boxed{p \geqslant n.}$$

2. Soit x un élément de E. $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est une famille génératrice de E donc il existe un élément $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})$ de $\mathbb{C}^p$ tel que : $x = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k(x_0)$.

$f^p(x) = f^p\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k(x_0)\right) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^p\big(f^k(x_0)\big) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^{p+k}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k\big(f^p(x_0)\big)$.

Or $f^p(x_0) = x_0$. Ainsi $f^p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k(x_0) = x$.

Finalement $\forall x \in E,\ f^p(x) = x = \text{id}_E(x)$ donc :

$$\boxed{f^p = \text{id}_E.}$$

$f \circ f^{p-1} = f^p = \text{id}_E$. De même $f^{p-1} \circ f = f^p = \text{id}_E$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = f^{p-1}.}$$

3. a. Par définition de m, $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est libre et $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^m(x_0)\big)$ est liée.

Par conséquent il existe un élément <u>non nul</u> $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de $\mathbb{C}^{m+1}$ tel que : $\sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k\ f^k(x_0) = 0_E$.

Supposons $\lambda_m = 0$. Alors $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \lambda_k\ f^k(x_0) = 0_E$. La liberté de la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ donne $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ ce qui induit une légère contradiction.

On peut donc affirmer que λ_m n'est pas nul et écrire : $f^m(x_0) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right) f^k(x_0)$.

$$\boxed{f^m(x_0) \text{ est combinaison linéaire de } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big).}$$

b. Montrons par récurrence que, pour tout élément k de $[\![m, +\infty[\![$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ...,$f^{m-1}(x_0)$.

• Nous venons de montrer que la propriété est vraie pour $k = m$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![m, +\infty[\![$ et montrons la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence permet de dire que $f^k(x_0)$ appartient à Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

Alors : $f^{k+1}(x_0) \in f\left(\text{Vect}\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big) = \text{Vect}\big(f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0)\big)\right.$.

De toute évidence $f^i(x_0)$ appartient à Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ si i appartient à $[\![1, m-1]\!]$. $f^m(x_0)$ appartient également à Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ d'après a.

Ainsi $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $f^i(x_0) \in \text{Vect}\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

Alors Vect $\big(f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0)\big) \subset$ Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$. Comme $f^{k+1}(x_0)$ appartient à Vect $\big(f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0)\big)$, $f^{k+1}(x_0)$ appartient à Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

$f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ..., $f^{m-1}(x_0)$ et ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ..., $f^{m-1}(x_0)$.

c. Nous venons de voir que pour tout élément k de $[\![m, +\infty[\![$ le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ..., $f^{m-1}(x_0)$. Ceci vaut également pour k dans $[\![0, m-1]\!]$.

Ainsi tous les éléments de la famille génératrice $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ sont combinaisons linéaires de la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

Alors $E = \text{Vect}\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big) \subset \text{Vect}\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big) \subset E$.

Ainsi Vect $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big) = E$.

La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est donc une famille génératrice de E. Rappelons que par définition de m elle est libre.

$\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est donc une base de E de cardinal m. Comme E est de dimension n :

$$\boxed{m = n \text{ et } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big) \text{ est une base de } E.}$$

4. a. Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$$g\big(f^k(x_0)\big) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^\ell\big(f^k(x_0)\big) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^{\ell+k}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^k\big(f^\ell(x_0)\big) = f^k\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^\ell(x_0)\right).$$

Rappelons que, par hypothèse, $f^n(x_0) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^\ell(x_0)$.

Ainsi $g\big(f^k(x_0)\big) = f^k\big(f^n(x_0)\big) = f^{k+n}(x_0) = f^{n+k}(x_0) = f^n\big(f^k(x_0)\big)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ g\big(f^k(x_0)\big) = f^{n+k}(x_0) = f^n\big(f^k(x_0)\big).}$$

Ceci permet en particulier de dire que les deux endomorphismes g et f^n coïncident sur les éléments de la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ de E. Alors $g = f^n$.

$$\boxed{f^n = a_0\ \mathrm{id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}.}$$

b. $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $f\big(f^i(x_0)\big) = 0.x_0 + 0.f(x_0) + \cdots + 0.f^i(x_0) + 1.f^{i+1}(x_0) + 0.f^{i+2}(x_0) + \cdots + 0.f^{n-1}(x_0)$.

On a également : $f\big(f^{n-1}(x_0)\big) = f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0)$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$. Posons pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $e_k = f^k(x_0)$.

$\big(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\big) = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. De plus $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f(e_k) = e_{k+1}$.

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (f - \lambda\ \mathrm{id}_E)(e_k) = (f - \lambda\ \mathrm{id}_E)(\big(f^k(x_0)\big) = f^{k+1}(x_0) - \lambda\, f^k(x_0) = e_{k+1} - \lambda\, e_k$.

$\big(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}, e_n - \lambda e_{n-1}\big)$ est donc une famille d'éléments de $\mathrm{Im}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E)$.

$\big(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}\big)$ également. Pour prouver que la dimension de $\mathrm{Im}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E)$ est supérieure ou égale à $n-1$, montrons que cette dernière famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que : $\lambda_1\, (e_1 - \lambda e_0) + \lambda_2\, (e_2 - \lambda e_1) + \cdots + \lambda_{n-1}\, (e_{n-1} - \lambda e_{n-2}) = 0_E$.

$-\lambda_1 \lambda\, e_0 + (\lambda_1 - \lambda_2 \lambda)\, e_1 + (\lambda_2 - \lambda_3 \lambda)\, e_2 + \cdots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \lambda)\, e_{n-2} + \lambda_{n-1}\, e_{n-1} = 0_E$.

La famille $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre il vient donc :

$-\lambda_1 \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \lambda = \lambda_2 - \lambda_3 \lambda = \cdots = \lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \lambda = \lambda_{n-1} = 0$.

Ceci donne sans difficulté $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

Ainsi $\big(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \ldots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E)$, de cardinal $n-1$.

Par conséquent $\dim \mathrm{Im}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) \geqslant n-1$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) \geqslant n-1.}$$

Soit λ une valeur propre de f et SEP (f, λ) le sous-espace propre associé.

$\dim \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. En appliquant le théorème du rang on obtient :

$\dim \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

$\mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) \geqslant n-1$ donne alors $\dim \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) \leqslant n - (n-1) = 1$.

Ainsi SEP (f,λ) est de dimension au plus 1.

Or par définition SEP (f,λ) est de dimension au moins 1. Alors $\dim \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) = 1$.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont de dimension 1.}}$$

5. a. f est cyclique d'ordre n donc $f^n = \mathrm{id}_E$ (d'après Q2). $X^n - 1$ est alors un polynôme annulateur de f. Toute valeur propre de f est alors une racine de ce polynôme. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si un nombre complexe } \lambda \text{ est valeur propre de } f, \text{ alors } \lambda^n = 1.}$$

b. $f^n(x_0) = x_0$, $f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0)$ et $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. Alors $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\lambda^n = 1$.

Soit x un élément de E de coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ dans la base $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$.

$$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_0$ et $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ \alpha_k = \lambda \alpha_{k+1}$.

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda\alpha_0$ et $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ \alpha_{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\ \alpha_k$.

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda\alpha_0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k = \dfrac{1}{\lambda^k}\ \alpha_0$.

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k = \dfrac{1}{\lambda^k}\,\alpha_0$ et $\alpha_0 = \dfrac{1}{\lambda}\,\alpha_{n-1} = \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{1}{\lambda^{n-1}}\,\alpha_0 = \dfrac{1}{\lambda^n}\,\alpha_0 = \alpha_0$!

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k = \dfrac{1}{\lambda^k}\,\alpha_0$.

Alors λ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par

$x_0 + \dfrac{1}{\lambda}\ f(x_0) + \dfrac{1}{\lambda^2}\ f^2(x_0) + \cdots + \dfrac{1}{\lambda^{n-1}}\ f^{n-1}(x_0)$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = e^{i\,\frac{2k\pi}{n}}$ et $t_k = x_0 + \dfrac{1}{\lambda_k}\ f(x_0) + \dfrac{1}{\lambda_k^2}\ f^2(x_0) + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k^{n-1}}\ f^{n-1}(x_0)$.

λ_0, λ_1,. .., λ_{n-1} sont les n solutions de l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^n = 1$.

λ_0, λ_1,. .., λ_{n-1} sont (les) n valeurs propres distinctes de f et $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est une famille d'éléments de E constituée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes.

$(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est alors une famille libre de cardinal n de l'espace vectoriel E dont la dimension est n.

$(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de f. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$
