PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Etude d'une solution de la suite $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\geqslant \mathbf{1}}$

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}\cdot$ Comme $p \leqslant p+1$, en intégrant il vient :

$\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t$; c'est à dire : $\displaystyle\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\cdot$

Alors $\displaystyle\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{p} \leqslant 0$ ou $\displaystyle\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geqslant \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall p \in [\![1, n]\!],\ 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\cdot$ En sommant on obtient :

$\displaystyle 0 \leqslant a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$ Ainsi $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = u_{n+1} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante et majorée donc convergente.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{La limite } \gamma \text{ de la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ vérifie : } 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.}$$

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1. a. $\varphi : x \to e^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est positive. Alors φ est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi la courbe représentative de φ est au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$; $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant e^0(x-0) + e^0 = x + 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un réel appartenant à $[0, n]$.

en appliquant 1. a. à $\dfrac{t}{n}$ et à $-\dfrac{t}{n}$ on obtient : $0 \leqslant 1 + \dfrac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}}$ et $0 \leqslant 1 - \dfrac{t}{n} \leqslant e^{-\frac{t}{n}}$.

Ainsi $0 \leqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^n = e^t$ et $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t}$. Poursuivons.

$0 \leqslant \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t$ et $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$ donc : $0 \leqslant \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

En multipliant par e^{-t} il vient : $0 \leqslant \left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,n],\ \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t,\quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}}$$

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall x \in [0,1], \psi(x) = (1-x)^n + nx - 1$.

ψ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ \psi'(x) = -n(1-x)^{n-1} + n = n\big[1-(1-x)^{n-1}\big] \geqslant 0$.

ψ est croissante sur $[0,1]$ et $\psi(0) = 0$. Alors $\forall x \in [0,1],\ \psi(x) \geqslant 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ (1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.}$$

<u>Remarque</u> *On peut également obtenir ce résultat en utilisant la convexité de* $x \to (1-x)^n$ *sur* $[0,1]$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un réel appartenant à $[0,n]$.

$\dfrac{t^2}{n^2}$ appartient à $[0,1]$. a. donne alors $\left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n + n\,\dfrac{t^2}{n^2} - 1 \geqslant 0$. Donc : $1-\dfrac{t^2}{n} \leqslant \left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n$.

Dès lors : $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}$.

1.b. donne enfin : $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

Alors $e^{-t} - \dfrac{t^2}{n}\, e^{-t} = \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

Finalement : $e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{t^2}{n}\, e^{-t}$. Rappelons que : $e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$ et concluons.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,n],\ 0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\, e^{-t}}$$

.

3. a. $f_n : t \to \dfrac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right)$ est continue sur $]0,n]$.

De plus : $\forall t \in]0,n],\ 0 \leqslant f_n(t) = \dfrac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right) \leqslant \dfrac{1}{t}\,\dfrac{t^2}{n}\, e^{-t} = \dfrac{t}{n}\, e^{-t}$.

$\forall t \in]0,n],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{t}{n}\, e^{-t}$ et $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{t}{n}\, e^{-t}\right) = 0$. Par encadrement il vient alors $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = 0$.

Ainsi f_n est continue sur $]0,n]$ et prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

<u>Remarque</u> $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t)=0$ *s'obtient également sans difficulté à l'aide d'un développement limité. On a même* $f_n(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2n}\,t$*.*

b. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. $\forall t\in]0,n],\ 0\leqslant f_n(t)\leqslant \dfrac{t}{n}\,e^{-t}$. Donc : $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{1}{n}\int_0^n t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ t\,e^{-t}\geqslant 0$ et $\Gamma(2)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\int_0^n t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t=1.$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n}$. Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=0.}$$

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{n}{k+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k+1}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot$ Or :

$\displaystyle n\,a_n=n\sum_{k=1}^n u_k=n\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)=n\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)=n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-n\int_1^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi $\displaystyle n\,a_n=n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-n\left[\ln|t|\right]_1^{n+1}=n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-n\,\ln(n+1).$

Ce qui donne : $\displaystyle n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=n\left(a_n+\ln(n+1)\right).$ Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\mathrm{d}t=n\left(a_n+\ln(n+1)\right).}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall t\in]0,n],\ g_n(t)=\dfrac{1}{t}\left(1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right)$. g_n est continue sur $]0,n]$.

$\forall t\in]0,n],\ g_n(t)=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k$

Alors $\displaystyle\lim_{t\to 0} g_n(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\right)=\frac{1}{n}\times n=1.$

g_n est donc continue sur $]0,n]$ et prolongeable par continuité en 0. $\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ J_n=\int_0^n\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

<u>Remarque</u> $\lim\limits_{t\to 0} g_n(t)=1$ *peut s'obtenir également en se rappelant* $(1+u)^\alpha-1\underset{u\to 0}{\sim}\alpha\,u$*.*

$\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^n\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\times n\left(a_n+\ln(n+1)\right).$

$\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t = a_n + \ln(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t = a_n + \ln(n+1).}$$

5. a. $h : t \to \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} h(t) = 1$ car : $\dfrac{1-e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-(-t)}{t} = 1$.

h est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0, ce qui suffit pour dire que $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi :

$$\boxed{U = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

Posons : $\forall t \in [1, +\infty[,\ \ell(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}\cdot$ ℓ est continue sur $[1, +\infty[$.

De plus $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \ell(t) = \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ell(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$J_n - I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t - \int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

Donc $J_n - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = U + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = U + \big[\ln|t|\big]_1^n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

$J_n - I_n = U + \ln n - \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Rappelons alors que $J_n = a_n + \ln(n+1)$. Ainsi :

$a_n = J_n - \ln(n+1) = U + \ln n - \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + I_n - \ln(n+1) = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + I_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\gamma = U - V$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \gamma$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = V$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$.

$$\boxed{\gamma = U - V.}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I : Etude d'un exemple

1. Soit λ un réel et soient P, Q et R trois éléments de E.

• $\varphi(\lambda P+Q,R)=\big(\lambda P+Q\big)(0)\,R(0)+\big(\lambda P+Q\big)(1)\,R(1)+\big(\lambda P+Q\big)(-1)\,R(-1)$.

$\varphi(\lambda P+Q,R)=\big(\lambda P(0)+Q(0)\big)\,R(0)+\big(\lambda P(1)+Q(1)\big)\,R(1)+\big(\lambda P(-1)+Q(-1)\big)\,R(-1)$.

$\varphi(\lambda P+Q,R)=\lambda\big[P(0)\,R(0)+P(1)\,R(1)+P(-1)\,R(-1)\big]+\big[Q(0)\,R(0)+Q(1)\,R(1)+Q(-1)\,R(-1)\big]$.

$\varphi(\lambda P+Q,R)=\lambda\,\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$.

• $\varphi(P,Q)=P(0)\,Q(0)+P(1)\,Q(1)+P(-1)\,Q(-1)=Q(0)\,P(0)+Q(1)\,P(1)+Q(-1)\,P(-1)=\varphi(Q,P)$.

• $\varphi(P,P)=\big(P(0)\big)^2+\big(P(1)\big)^2+\big(P(-1)\big)^2\geqslant 0$.

• Supposons que $\varphi(P,P)=0$. Alors $\big(P(0)\big)^2+\big(P(1)\big)^2+\big(P(-1)\big)^2=0$.

Donc $\big(P(0)\big)^2=\big(P(1)\big)^2=\big(P(-1)\big)^2=0$.

Ce qui donne $P(0)=P(1)=P(-1)=0$. P est alors un polynôme de degré au plus 2 qui a trois zéros distincts. P est donc le polynôme nul.

Ainsi $\varphi(P,P)=0\Rightarrow P=0_E$.

Les quatre points précédents indiquent alors que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. a. Soit P un élément de $E=\mathbb{R}_2[X]$. La formule de Taylor donne $P(X)=P(0)+P'(0)\,X+\dfrac{P''(0)}{2}X^2$.

Alors $P(1)-P(-1)=P(0)+P'(0)+\dfrac{P''(0)}{2}-\left(P(0)-P'(0)+\dfrac{P''(0)}{2}\right)=2\,P'(0)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall P\in E,\ 2\,P'(0)-P(1)+P(-1)=0.}$$

2. b. Soit P un élément de E. $U(P)=2\,P'(0)\,X^2-\big(P(1)+P(-1)\big)\,X$.

$U(P)(0)=0$, $U(P)(1)=2\,P'(0)-\big(P(1)+P(-1)\big)=-2\,P(-1)$ (d'après a.) et $U(P)(-1)=2\,P'(0)+\big(P(1)+P(-1)\big)=2\,P(1)$ (toujours d'après a.). Alors :

$\varphi\big(u(P),P\big)=u(P)(0)\,P(0)+u(P)(1)\,P(1)+u(P)(-1)\,P(-1)=0\times P(0)-2\,P(-1)\,P(1)+2\,P(1)\,P(-1)=0$.

$$\boxed{\forall P\in E,\ \varphi\big(u(P),P\big)=0.\ u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

3. a. $P_1 = \dfrac{1}{2}\,\big(X^2+X\big)$. $P_1' = X + \dfrac{1}{2}$. $P_1'(0) = \dfrac{1}{2}$, $P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = 0$.

Alors $u(P_1) = 2\,P_1'(0)\,X^2 - \big(P_1(1)+P_1(-1)\big)\,X = X^2 - X$. Notons que $\big(X^2-X\big)' = 2X-1$

Plus rapidement : $u^2(P_1) = u(X^2-X) = 2(-1)\,X^2 - (0+2)\,X = -2(X^2+X) = -4\,P_1$.

Alors P_1 est un élément non nul de E tel que $u^2(P_1) = -4\,P_1$.

$$\boxed{P_1 \text{ est un vecteur propre de } u^2 \text{ associé à la valeur propre } -4.}$$

u est antisymétrique donc P_1 et $u(P_1)$ sont orthogonaux. P_1 et $\dfrac{1}{2}\,u(P_1)$ le sont également. Ainsi (P_1, P_2) est une famille orthogonale de E.

De plus $\|P_1\|^2 = \varphi(P_1, P_1) = \big(P_1(0)\big)^2 + \big(P_1(1)\big)^2 + \big(P_1(-1)\big)^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2$. $\|P_1\| = 1$.

$u(P_1) = X^2 - X$. $P_2 = \frac{1}{2}\,X^2 - \frac{1}{2}\,X$. $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 0$ et $P_2(-1) = 1$.

Alors $\|P_2\|^2 = \big(P_2(0)\big)^2 + \big(P_2(1)\big)^2 + \big(P_2(-1)\big)^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$. $\|P_2\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_2) = 0$, $\|P_1\| = 1$ et $\|P_1\| = 1$. Finalement :

$$\boxed{(P_1, P_2) \text{ est une famille orthonormale de } E.}$$

b. Soit P un élément de E.

$P \in \operatorname{Ker} u \iff 2\,P'(0)\,X^2 - \big(P(1)+P(-1)\big)\,X = 0_E \iff 2\,P'(0) = P(1) + P(-1) = 0$.

Rappelons que $2P'(0) = P(1) - P(-1)$

$P \in \operatorname{Ker} u \iff P(1) - P(-1) = P(1) + P(-1) = 0 \iff P(1) = P(-1) = 0 \iff (X-1)(X-1)$ divise P.

Comme P est un polynôme de degré au plus 2 : $P \in \operatorname{Ker} u \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ P = \lambda\,(X^2-1)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ est la droite vectorielle de } E \text{ engendrée par } X^2-1.}$$

Posons $P_3 = X^2 - 1$. $\|P_3\|^2 = \big(P_3(0)\big)^2 + \big(P_3(1)\big)^2 + \big(P_3(-1)\big)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2$. $\|P_3\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_3) = P_1(0)\,P_3(0) + P_1(1)\,P_3(1) + P_1(-1)\,P_3(-1) = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$

$\varphi(P_2, P_3) = P_2(0)\,P_3(0) + P_2(1)\,P_3(1) + P_2(-1)\,P_3(-1) = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$.

Alors (P_1, P_2, P_3) est une famille orthonormale, donc libre, de trois éléments de E qui est un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de E.

Rappelons que $u(P_1) = 2P_2$, $u(P_2) = \frac{1}{2}\,u^2(P_1) = \frac{1}{2}\,(-4\,P_1) = -2P_1$ et $u(P_3) = 0_E$. Finalement :

$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_2) = \left(\frac{1}{2}(X^2+X), \frac{1}{2}(X^2-X), X^2-1\right)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

1. Soient x et y deux éléments de E.

$< u(x+y), x+y >=< u(x)+u(y), x+y >=< u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x+y), x+y >=< u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >.}$$

• Supposons que u est antisymétrique. $\forall t \in E,\ < u(t), t >= 0$.

Alors $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x+y), x+y >= 0$.

Donc $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >= 0$.

Ce qui donne encore : $\forall (x,y) \in E^2,\ 0 + < u(x), y > + < u(y), x > + 0 = 0$.

Finalement $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$.

• Réciproquement supposons que : $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$ et montrons que u est antisymétrique.

Par hypothèse : $\forall x \in E,\ < u(x), x >= - < x, u(x) >= - < u(x), x >$.

Donc $\forall x \in E,\ 2 < u(x), x >= 0$ ou $\forall x \in E,\ < u(x), x >= 0$. u est antisymétrique.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si} : \forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >.}$$

2. a. Soient i et j deux élément de $[\![1, n]\!]$. $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\, e_k$.

Alors $< e_i, u(e_j) >=< e_i, \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\, e_k >= \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} < e_i, e_k >$.

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant une base orthonormale on obtient $< e_i, u(e_j) >= m_{i,j}$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j} =< e_i, u(e_j) >.}$$

b. M est la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

• Supposons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{j,i} =< e_j, u(e_i) >= - < u(e_j), e_i >= - < e_i, u(e_j) >= -m_{i,j}$. Ainsi ${}^tM = -M$.

• Réciproquement supposons que ${}^tM = -M$ et montrons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Soient x et y deux éléments de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ les coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$ dans $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ étant orthonormale $< u(x), y >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x'_k\, y_k$ et $< x, u(y) >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, y'_k$.

$$< u(x), y >= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{k,j}\, x_j \right) y_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\; y_k \right) = -\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} m_{j,k}\; y_k \right) = -\sum_{j=1}^{n} x_j\, y'_j.$$

Ainsi $< u(x), y >= - < x, u(y) >$. Ce qui achève de prouver que u est antisymétrique.

Remarques *1. Au niveau de la réciproque on aurait pu se contenter de prouver que* $\forall x \in E < u(x), x >= 0$.

2. On peut également obtenir cette réciproque en faisant intervenir les matrices X et Y de x et y dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ et écrire :

$$< u(x), y >=< MX, Y >= {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tMY = -{}^tXMY = - < X, MY >=< x, u(y) >$$

u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

1. Soit λ un réel valeur propre de u. Il existe un élément non nul x de E tel que $u(x) = \lambda\, x$.

$< u(x), x >= 0$ et $< u(x), x >=< \lambda\, x, x >= \lambda < x, x >= \lambda\, \|x\|^2$. Donc $\lambda\, \|x\|^2 = 0$.

Comme x n'est pas nul sa norme ne l'est pas davantage et λ est nul.

Si λ est un réel valeur propre de u, λ est nul.

2. Soit x un élément de $\operatorname{Ker} u$ et y un élément de $\operatorname{Im} u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

$< x, y >=< x, u(t) >= - < u(x), t >= - < 0_E, t >= 0$. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.

En particulier $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$. Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$. Il est alors clair que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires.

$\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires.

Sans aucun doute $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} u^2$. $u\big(u(x)\big) = 0_E$ donc $u(x)$ est élément de $\operatorname{Ker} u$... et de $\operatorname{Im} u$.

Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires : $u(x) = 0_E$ et x appartient à $\operatorname{Ker} u$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ et finalement :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2.}$$

3. Soit M la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. D'après **II 2. b.**, ${}^tM = -M$.

M^2 est la matrice de u^2 dans $\mathcal{B}$ et ${}^tM^2 = {}^tM\,{}^tM = (-M)(-M) = M^2$.

La matrice de u^2 dans la base **orthonormale** $\mathcal{B}$ est symétrique donc u^2 est symétrique.

Soit λ une valeur propre de u^2. Il existe un élément non nul x de E tel que $u^2(x) = \lambda\, x$.

$\lambda\,\|x\|^2 =< \lambda\, x, x >=< u^2(x), x >= - < u(x), u(x) >= -\|u(x)\|^2$.

x n'est pas nul donc $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}\cdot$ Il devient alors clair que λ est un réel négatif ou nul.

$$\boxed{u^2 \text{ est un endomorphisme symétrique de } E \text{ et toute valeur propre de } u^2 \text{ est négative ou nulle.}}$$

4. a. u^2 est un endomorphisme symétrique de E donc u^2 est diagonalisable. Ainsi il existe une base $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u^2.

Supposons que 0 soit la seule valeur propre de u^2. Comme u^2 est un endomorphisme symétrique, u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2$ est le seul sous-espace propre de u^2.

Alors $\operatorname{Ker} u^2 = E$. **2.** donne alors $\operatorname{Ker} u = E$. u est alors l'endomorphisme nul ce qui contredit l'hypothèse faite au début de la partie.

$$\boxed{u^2 \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$$

b. Il existe un réel non nul λ tel que $u^2(x) = \lambda\, x$. Notons que, d'après ce qui précède, λ est strictement négatif.

$u(F) = u\left(\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)\right) = \operatorname{Vect}\big(u(x), u^2(x)\big) = \operatorname{Vect}\big(u(x), \lambda\, x\big) \subset \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) = F$. F est stable par u.

Ne reste plus qu'à montrer que $F = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan vectoriel de E. Pour ce faire il suffit de montrer que la famille $\big(x, u(x)\big)$ est libre car c'est déjà une famille génératrice de F.

Supposons $\big(x, u(x)\big)$ liée. Comme x n'est pas nul il existe un réel γ tel que $u(x) = \gamma\, x$. Alors $u^2(x) = \gamma^2\, x$ or $u(x) = \lambda\, x$. Ainsi $\gamma^2\, x = \lambda\, x$. x n'étant pas nul, $\lambda = \gamma^2$ ce qui contredit le fait que λ est strictement négatif.

Finalement $\big(x, u(x)\big)$ est libre.

$$\boxed{F = \text{Vect}\big(x, u(x)\big) \text{ est un plan vectoriel de } E \text{ stable par } u.}$$

c. Qui peut le plus peut le moins. Prenons donc un sous-espace vectoriel G stable par u et montrons que $G^{\perp}$ est également stable par u.

Soit z un élément de $G^{\perp}$. Montrons que $u(z)$ appartient encore à $G^{\perp}$.

$\forall x \in G,\ u(x) \in G$. Donc $\forall x \in G,\ < u(x), z >= 0$.

u étant antisymétrique on a encore : $\forall x \in G,\ - < x, u(z) >= 0$ ou $\forall x \in G,\ < x, u(z) >= 0$. Ce qui signifie que $u(z)$ est un élément de $G^{\perp}$.

$\forall z \in G^{\perp},\ u(z) \in G^{\perp}$. $G^{\perp}$ est stable par G. Ce résultat appliqué à F permet de dire que :

$$\boxed{F^{\perp} \text{ est stable par } u.}$$

d. u_1 est un endomorphisme de $F^{\perp}$ et $\forall (x, y) \in \left(F^{\perp}\right)^2,\ < u(x), x >_1 = < u(x), x >= 0$.

u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$.

$\text{Im}\, u_1$ est un sous-espace vectoriel de $F^{\perp}$ donc $F \cap \text{Im}\, u_1 = \{0_E\}$. F et $\text{Im}\, u_1$ sont en somme directe.

Montrons alors, par double inclusion, que $\text{Im}\, u = F \oplus \text{Im}\, u_1$.

• λ n'est pas nul et $u(x) = \lambda\, x$ donc $x = u\left(\frac{1}{\lambda}\, x\right)$ est un élément de l'image de u. Alors x et $u(x)$ sont deux éléments de l'image de u. Ainsi $F = \text{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est contenu dans $\text{Im}\, u$.

$\text{Im}\, u_1 = u_1\left(F^{\perp}\right) = u\left(F^{\perp}\right) \subset \text{Im}\, u$.

F et $\text{Im}\, u_1$ étant contenu dans $\text{Im}\, u$, $F \oplus \text{Im}\, u_1$ est contenu dans $\text{Im}\, u$.

• Réciproquement soit y un élément de $\text{Im}\, u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires donc il existe un unique élément (t', t'') de $F \times F^{\perp}$ tel que $t = t' + t''$.

$y = u(t) = u(t') + u(t'') = u(t') + u_1(t'')$. $u(t')$ appartient à F car t' est dans F qui est stable par u, et $u_1(t'')$ est un élement de $\text{Im}\, u_1$. Alors y appartient à $F + \text{Im}\, u_1 = F \oplus \text{Im}\, u_1$.

Ceci achève de montrer que $\text{Im}\, u$ est contenu dans $F \oplus \text{Im}\, u_1$.

$$\boxed{u_1 \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } F^{\perp} \text{ et } \text{Im}\, u = F \oplus \text{Im}\, u_1}$$

5. Montrons le résultat à l'aide d'une récurrence faible sur la dimension de E.

• Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel E de dimension 0.

Nécessairement $\text{Im}\, u = \{0_E\}$ et donc le rang de u qui vaut 0 est pair. La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que tout endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension inférieure ou égale à n soit de rang pair. Montrons qu'il en est encore de même pour les endomorphismes antisymétriques des espaces vectoriels euclidiens de dimension $n+1$.

Soit u un endomorphisme antisymétrique d'une espace vectoriel euclidien E de dimension $n+1$.

Si u est nul son rang, qui vaut 0, est pair. Supposons désormais que u n'est pas nul et utilisons à plein **4.**.

u^2 possède une valeur propre non nulle (et même strictement négative). Soit x un vecteur propre associé à cette valeur propre. $F = \big(x, u(x)\big)$ est un plan vectoriel stable par u. $F^\perp$ est stable par u.

Soit u_1 l'endomorphisme de $F^\perp$ défini par : $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$. u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

$\dim F^\perp = (n+1) - 2 = n-1$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de dire que le rang de u_1 est pair.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim\big(F \oplus \operatorname{Im} u_1\big) = \dim F + \dim \operatorname{Im} u_1 = 2 + \operatorname{rg} u_1$ pour dire que le rang de u est pair et ainsi achever la récurrence.

$$\boxed{\text{Le rang d'un endomorphime antisymétrique est pair.}}$$

PARTIE IV : Application

1. ${}^tA = -A$. Comme A est la matrice de u relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$ on peut dire que :

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&1&-1\\-4&0&-1&-1\\-1&1&0&-5\\1&1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&1&-1\\-4&0&-1&-1\\-1&1&0&-5\\1&1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\\9\\0\end{pmatrix}. \text{ Alors } A^2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi $u^2(f_1) = -9\,f_1$. f_1 n'étant pas nul :

$$\boxed{f_1 = e_1 + e_2 - e_3 \text{ est un vecteur propre de } u^2 \text{ associé à la valeur propre } -9}$$

2. Ce que nous avons vu plus haut (**III 4.**) permet déjà de dire que F est un plan vectoriel stable par F et que $\big(f_1, u(f_1)\big)$ en est une base et même une base orthogonale car f_1 et $u(f_1)$ sont orthogonaux.

Posons dès lors $e'_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|}\,f_1$ et $e'_2 = \dfrac{1}{\|u(f_1)\|}\,u(f_1)$. (e'_1, e'_2) est alors une base orthonormale de F.

$f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $u(f_1) = 3\,e_1 - 3\,e_2 - 3\,e_4$. Par conséquent $\|f_1\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_1)\| = 3\sqrt{3}$.

$$\boxed{(e_1', e_2') = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4)\right) \text{ est une base orthonormale de } F.}$$

Cherchons $F^\perp$. Nous pouvons déjà dire que $F^\perp$ est un plan vectoriel ($\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 4-2 = 2$) stable par u.

Soit $x = x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3 + x_4\,e_4$ un élément de E.

Comme (e_1', e_2') est une base de F :

$x \in F^\perp \iff < x, e_1' > = < x, e_2' > = 0 \iff x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 - x_4 = 0 \iff x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_1 - x_2$.

Pas de doute, $f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ est un élément de $F^\perp$. Alors $u(f_3)$ est également un élément de $F^\perp$.

Notons que $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$ (ce qui confirme son appartenance à $F^\perp$).

$\big(f_3, u(f_3)\big)$ est alors une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de $F^\perp$. $\big(f_3, u(f_3)\big)$ est donc une famille libre et orthogonale de deux éléments du plan vectoriel $F^\perp$. $\big(f_3, u(f_3)\big)$ est une base orthogonale de $F^\perp$.

Posons $e_3' = \dfrac{1}{\|f_3\|}\ f_3$ et $e_4' = \dfrac{1}{\|u(f_3)\|}\ u(f_3)$. (e_3', e_4') est alors une base orthonormale de $F^\perp$.

$f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ et $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$. Par conséquent $\|f_3\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_3)\| = 6\sqrt{3}$.

$$\boxed{(e_3', e_4') = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-e_2 - e_3 + e_4\big)\right) \text{ est une base orthonormale de } F^\perp.}$$

3. (e_1', e_2') est une base orthonormale de F, (e_3', e_4') est une base orthonormale de $F^\perp$ et, F et $F^\perp$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\mathcal{B}_0 = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ est une base orthonormale de E.

Cherchons la matrice de u dans cette base.

Rappelons que $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ f_1$ et que $e_2' = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\ u(f_1)$. Alors $u(e_1') = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,u(f_1) = 3\,e_2'$.

Rappelons également que $u^2(f_1) = -9\,f_1 = -9\sqrt{3}\,e_1'$.

Alors $u(e_2') = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,u^2(f_1) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,(-9\sqrt{3}\,e_1') = -3\,e_1'$.

$e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\big(e_1 + e_3 + e_4\big)$ et $e_4' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\big(-e_2 - e_3 + e_4\big)$,

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-6\\6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\-6\\-6\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Donc $u(e_3') = 6\,e_4'$ et $u(e_4') = -6\,e_3'$. Finalement :

$\mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\big(e_1 + e_2 - e_3\big), \frac{1}{\sqrt{3}}\big(e_1 - e_2 - e_4\big), \frac{1}{\sqrt{3}}\big(e_1 + e_3 + e_4\big), \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-e_2 - e_3 + e_4\big)\right)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$