EM LYON 2011 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Partie I : Somme de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1

---

1. Il résulte du cours que :

La fonction h définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 valent 1.

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n possèdent une espérance et une variance qui valent 1.

Donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ possède une espérance et une variance.

La linéarité de l'espérance donne alors $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

L'indépendance des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n permet d'écrire que $V(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 donc la loi gamma de paramètres 1 et 1 (ou la loi gamma de paramètre 1).

Le cours permet alors de dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres 1 et n (ou la loi gamma de paramètre n).

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \Gamma(1, n)$ ou $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Remarque Ceci permet de retrouver l'espérance et la variance de S_n.

Dans ces conditions :

pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction h_n définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}\, e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de S_n.

Remarques 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, +\infty[,\ h_n(t) = \dfrac{t^{n-1}\, e^{-t}}{(n-1)!}$.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $\widehat{h}_n$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{h}_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}\, e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est encore une densité de S_n.

3. Notons F_U et F_Y les fonctions de répartition de U et de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(-\ln(1-U) \leqslant x) = P(\ln(1-U) \geqslant -x) = P(1-U \geqslant e^{-x}) = P(U \leqslant 1 - e^{-x})$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_U(1-e^{-x})$.

Si x est un élément de $]-\infty, 0[$, $1 - e^{-x} < 0$ et ainsi $F_Y(x) = F_U(1-e^{-x}) = 0$.

Si x est un élément de $[0, +\infty[$, $0 \leqslant 1 - e^{-x} < 1$ et donc $F_Y(x) = F_U(1-e^{-x}) = 1 - e^{-x}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors :

$$\boxed{Y = -\ln(1-U) \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

4. La fonction random permet de simuler U donc la fonction -ln(1-random) permet de simuler $-\ln(1-U)$ donc la loi exponentielle de paramètre 1.

On simule alors S_n en ajoutant les résultats de n simulations (indépendantes) de la loi exponentielle de paramètre 1.

Nous allons plutôt écrire une fonction qu'un programme.

```
function Simule_S_n(n:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to n do
s:=s-ln(1-random);
Simule_S_n:=s;
end;
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Ici aussi nous écrirons une fonction. Proposons deux versions.

La première simule S_1, S_2, ..., S_n, ... tant que la simulation donne une valeur inférieure ou égale à t.

La seconde simule S_1, S_2, ..., S_n, ... jusqu'à ce que la simulation donne une valeur strictement supérieure à t. On renvoie alors la valeur $n-1$ si n a été initialisé à 0 ou n si n a été initialisé à -1.

```
function Simule_N_t_V1(t:real):integer;

var n:integer;s:real;

begin
n:=0;s:=-ln(1-random);
while (s<=t) do begin
                n:=n+1;
                s:=s-ln(1-random);
                end;
Simule_N_t_V1:=n;
end;
```

```
function Simule_N_t_V2(t:real):integer;

var n:integer;s:real;

begin
n:=-1;s:=0;
repeat
n:=n+1;s:=s-ln(1-random);
until(s>t);
Simule_N_t_V2:=n;
end;
```

Exercice *Soit t un un réel strictement positif.*

Q1. Montrer que presque sûrement il existe au moins un élément i de $\mathbb{N}^*$ tel que $\{S_i > t\}$ se réalise.

Q2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les événements $\{N_t = n\}$ et $\{S_n \leqslant t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$ sont égaux.

Q3. Montrer que N_t suit la loi de Poisson de paramètre t.

Partie II : Polynômes de Laguerre

Remarque *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $x \to x^n$ et $x \to e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors par produit f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie la définition de $f_n^{(n)}$ et donc de L_n.*

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = e^x\, f_0^{(0)}(x) = e^x\, f_0(x) = e^x\, e^{-x} = 1$. Donc $L_0 = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = 1 \text{ ou } L_0 = 1.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x\, e^{-x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = e^x\, f_1'(x) = e^x \left(e^{-x} + x\,(-e^{-x})\right) = 1 - x$. Donc $L_1 = 1 - X$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = 1 - x \text{ ou } L_1 = 1 - X.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}\, x^2\, e^{-x}$. La formule de leïbniz donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2}\, \left(2\, e^{-x} + 2\,(2\,x)\,(-e^{-x}) + x^2\, e^{-x}\right)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\, e^{-x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = e^x\, f_2''(x) = e^x \left(\dfrac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\, e^{-x}\right) = 1 - 2\,x + \dfrac{1}{2}\, x^2$.

Ou $L_2 = 1 - 2\,X + \dfrac{1}{2}\, X^2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = 1 - 2\,x + \frac{1}{2}\, x^2 \text{ ou } L_2 = 1 - 2\,X + \frac{1}{2}\, X^2.}$$

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = x^n$ et $v(x) = e^{-x}$. u_n et v sont n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n = \dfrac{1}{n!}\, u_n\, v$.

La formule de leïbniz donne alors : $f_n^{(n)} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_n^{(k)}\, v^{(n-k)} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_n^{(n-k)}\, v^{(k)}$.

Deux récurrences simples montrent que :

1. $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)} = (-1)^k\, v$ ou $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v^{(k)}(x) = (-1)^k\, e^x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} u_n^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x) \right] = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \dfrac{n!}{(n-(n-k))!}\, x^{n-(n-k)}\, (-1)^k\, e^{-x} \right]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \dfrac{n!}{k!}\, x^k\, (-1)^k\, e^{-x} \right] = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right]$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = e^x\, f_n^{(n)}(x) = e^x \left(e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right] \right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right] = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \text{ ou } L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k\ .}$$

8. Notons que $\dfrac{(-1)^n}{n!} \dbinom{n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n!} \neq 0$! ! Alors plus de doute !

$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ L_n \text{ est une fonction polynômiale (ou un polynôme) de degré } n \text{ dont le coefficient du terme de plus haut degré est } \dfrac{(-1)^n}{n!}.}$

9. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} (n+1)\, x^n\, e^{-x} + \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, (-e^{-x}) = \dfrac{1}{n!}\, x^n\, e^{-x} - \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).}$$

10. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}(x) = e^x\, f_{n+1}^{(n+1)}(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x\, f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x\, f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x \left(f_{n+1}^{(n+1)}(x) + f_{n+1}^{(n+2)}(x) \right)$.

Or $f'_{n+1} = f_n - f_{n+1}$. En dérivant $n+1$ fois on obtient : $f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)} - f_{n+1}^{(n+1)}$ ou $f_{n+1}^{(n+1)} + f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x\, f_n^{(n+1)}(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = e^{-x}\, L_n(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x}\, L_n(x) + e^{-x}\, L'_n(x) = e^{-x} \left(L'_n(x) - L_n(x) \right)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x\, f_n^{(n+1)}(x) = e^x\, e^{-x} \left(L'_n(x) - L_n(x) \right) = L'_n(x) - L_n(x)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ L'_{n+1} = L'_n - L_n.}$$

11. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}\, e^{-x}}{(n+1)!} = \dfrac{x}{n+1}\, \dfrac{x^n\, e^{-x}}{n!} = \dfrac{x}{n+1}\, f_n(x)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}\, f_n(x).}$$

12. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = (n+1)\, e^x\, f_{n+1}^{(n+1)} = e^x \left((n+1)\, f_{n+1} \right)^{(n+1)}(x)$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ u_1(x) = x$. Alors $(n+1)\, f_{n+1} = u_1\, f_n$ d'après **Q11**.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = e^x \left((n+1)\, f_{n+1} \right)^{(n+1)}(x) = e^x\, (u_1\, f_n)^{(n+1)}(x)$.

La formule de Leïbniz donne $(u_1\, f_n)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_1^{(k)}\, f_n^{(n+1-k)}$.

Or $u_1^{(0)} = u_1$, $u_1^{(1)} = 1$ et $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ u_1^{(k)} = 0$.

Alors $(u_1\, f_n)^{(n+1)} = \dbinom{n+1}{0} u_1\, f_n^{(n+1)} + \dbinom{n+1}{1} 1 \times\ f_n^{(n)} = u_1\, f_n^{(n+1)} + (n+1)\, f_n^{(n)}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = e^x\, (u_1\, f_n)^{(n+1)}(x) = e^x \Big(x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, f_n^{(n)}(x)\Big)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, e^x\ f_n^{(n)}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, L_n(x)$.

Remarquons alors que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = e^{-x}\, L_n(x)$.

Donc en dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x}\, L_n(x) + e^{-x}\, L'_n(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x\, f_n^{(n+1)}(x) = -L_n(x) + L'_n(x)$ (résultat que nous avions déjà obtenu dans **Q10**)...).

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, L_n(x) = x\,\big(-L_n(x) + L'_n(x)\big) + (n+1)\, L_n(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L'_n(x) + (n+1-x)\, L_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L'_n(x) + (n+1-x)\, L_n(x).}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ (n+1)\, L_{n+1} = X\, L'_n + (n+1-X)\, L_n.}$$

13. Soit n dans $\mathbb{N}$. $(n+1)\, L_{n+1} = X\, L'_n + (n+1-X)\, L_n$. En dérivant on obtient :

$(n+1)\, L'_{n+1} = L'_n + X\, L''_n -\ L_n + (n+1-X)\, L'_n = X\, L''_n -\ L_n + (n+2-X)\, L'_n$. Or $L'_{n+1} = L'_n - L_n$.

Ainsi $(n+1)\,(L'_n - L_n) = X\, L''_n -\ L_n + (n+2-X)\, L'_n$. Ce qui donne :

$0_{\mathbb{R}[X]} = -(n+1)\,(L'_n - L_n) + X\, L''_n -\ L_n + (n+2-X)\, L'_n = X\, L''_n - (X-1)\, L'_n + n\, L_n$.

$X\, L''_n - (X-1)\, L'_n + n\, L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X\, L''_n - (X-1)\, L'_n + n\, L_n = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x\, L''_n(x) - (x-1)\, L'_n(x) + n\, L_n(x) = 0.}$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

---

14. • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{(k+1)-1}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

• Soit A un élément de E. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tels que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k\, e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } A \text{ de } E\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *en montrant que* $\big|A(x)\, e^{-x}\big| \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *par croissance comparée.*

15. • Soit (P,Q) un couple d'éléments de E.

$P\,Q$ appartient à E donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}(PQ)(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge ! Ainsi $< P,Q >$ existe.

$< .,. >$ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de E.

$$< \lambda\,P+Q, R >= \int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P+Q\big)(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P(x)\,R(x)+Q(x)\,R(x)\big)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$< \lambda\,P+Q, R >= \int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P(x)\,R(x)\,e^{-x}+Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{+\infty}P(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\,P+Q,R >= \lambda < P,R > + < Q,R >$.

$\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (P,Q,R)\in E^3,\ < \lambda\,P+Q,R >= \lambda < P,R > + < Q,R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

• Soit (P,Q) un couple d'éléments de E. $\displaystyle < P,Q >= \int_0^{+\infty}P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}Q(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x =< Q,P >$.

$\forall (P,Q)\in E^2,\ < P,Q >=< Q,P >$. $< .,. >$ est symétrique.

• Soit P un élément de E. $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\geqslant 0$ et $0\leqslant +\infty$! donc $\displaystyle < P,P >= \int_0^{+\infty}\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

$\forall P\in E,\ < P,P >\geqslant 0$. $< .,. >$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $< P,P >= 0$.

- ▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$.
- ▼ $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est positive sur $[0,+\infty[$.
- ▼ $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- ▼ $0\neq+\infty$!

Alors $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est nulle sur $[0,+\infty[$. Comme $x\to e^{-x}$ ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$: $\forall x\in[0,+\infty[,\ \big(P(x)\big)^2=0$.

Ainsi $\forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)=0$. La fonction polynômiale P admet alors une infinité de zéro c'est donc la fonction polynômiale nulle. $P=0_E$.

$\forall P\in E,\ < P,P >\Rightarrow P=0_E$. $< .,. >$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

16. • Soit P un élément de E. $x \to x$, P'', $x \to x-1$ et P' sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par produit $x \to x\,P''(x)$ et $x \to (x-1)\,P'(x)$ sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire $x \to x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x)$ est une application polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc un élément de E. Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$\forall P \in E,\ T(P) \in E$. T est une application de E dans E.

• Soit λ un réel et soient P, Q deux éléments de E.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = x\,(\lambda\,P+Q)''(x) - (x-1)\,(\lambda\,P+Q)'(x) = x\,\big(\lambda\,P''(x)+Q''(x)\big) - (x-1)\,\big(\lambda\,P'(x)+Q'(x)\big)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = \lambda\big(x\,P''(x)+(x-1)\,P'(x)\big) + \big(x\,Q''(x)+(x-1)\,Q'(x)\big) = \lambda\,T(P)(x)+T(Q)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = \big(\lambda\,T(P)+T(Q)\big)(x)$. $T(\lambda\,P+Q) = \lambda\,T(P)+T(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ T(\lambda\,P+Q) = \lambda\,T(P)+T(Q)$. T est linéaire. Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } E.}$$

17. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\,P'(x)\,e^{-x}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = P'(x)\,e^{-x} + x\,P''(x)\,e^{-x} + x\,P'(x)\,(-e^{-x}) = (x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x))\,e^{-x} = T(P)(x)\,e^{-x}$.

$x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de $x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

Pour pout P dans E, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

18. Soient P et Q deux éléments de E.

Rappelons que nous avons posé $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\,P'(x)\,e^{-x}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = T(P)(x)\,e^{-x}$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$. φ et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc nous pouvons intégrer par parties.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\,Q(x)\Big]_0^A - \int_0^A \varphi(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \varphi(A)\,Q(A) - \varphi(0)\,Q(0) - \int_0^A x\,P'(x)\,e^{-x}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$. Notons que $\varphi(0) = 0$. Alors :

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = A\ P'(A)\,e^{-A}\,Q(A) - \int_0^A x\,P'(x)\,e^{-x}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A} - \int_0^A x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (1)$.

$x \to x\,P'(x)\,Q'(x)$ appartient à E comme produit de trois éléments de E.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad (2)$.

Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) = 0$.

$x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ est un élément de E comme produit de trois éléments de E.

Si $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ est la fonction nulle de E alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) = 0$!

Supposons maintenant que $x \to x\, P'(x)\, Q(x)$ n'est pas la fonction nulle de E.

Soit r le degré de la fonction polynôme $x \to x\, P'(x)\, Q(x)$ et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré.

$\left(A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A}\right) \underset{A\to+\infty}{\sim} a_r\, A^r\, e^{-A} = a_r\, \dfrac{A^r}{e^A}$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(a_r\, \dfrac{A^r}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A}\right) = 0 \quad (3).$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1), et en tenant compte de (2) et (3) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E\times E,\ < T(P), Q >= -\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x.}$$

19. Soit P et Q deux éléments de E. $< T(P), Q >= -\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x.$

L'intégrale ne change pas si l'on permute P et Q donc $< T(P), Q >=< T(Q), P >$.

Par symétrie du produit scalaire : $< T(P), Q >=< P, T(Q) >$.

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E\times E,\ < T(P), Q >=< P, T(Q) >.}$$

Remarque *T est un endomorphisme symétrique de $(E, < .,. >)$, non ?! Mais il est vrai que le programme se limite aux endomorphismes symétriques d'espaces vectoriels euclidiens...*

20. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x\in\mathbb{R},\ T(L_n)(x) = x\, L_n''(x) - (x-1)\, L_n'(x) = -n\, L_n(x)$ d'après **Q13**. Donc $T(L_n) = -n\, L_n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ T(L_n) = -n\, L_n.}$$

Remarque *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $L_n \neq 0_E$. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $-n$ est une valeur propre de T et L_n est un vecteur propre associé.*

Exercice *Montrer que le spectre de T est $\{-n\,,\ n\in\mathbb{N}\}$.*

21. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0,N]\!]$. $< T(L_i), L_j >=< L_i, T(L_j) >$ d'après **Q19**.

Donc $< -i\, L_i, L_j >=< L_i, -j\, L_j >$. Alors $-i\ < L_i, L_j >= -j\ < L_i, L_j >$ et ainsi $(j-i)\ < L_i, L_j >= 0$.

Comme $j-i$ n'est pas nul : $< L_i, L_j >$ est nul.

$\forall (i,j)\in [\![0,N]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow < L_i, L_j >= 0.$

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

Remarque *Ce qui n'est pas un scoop car L_0, L_1, ..., L_N sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.*

22. Soit P un élément de E_N. P est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

P'' (resp. P') est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-2$ (resp. $N-1$).

Alors $x\to x\, P''(x)$ (resp. $x\to (x-1)\, P'(x)$) est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-1$ (resp. N).

Alors les deux fonctions $x \to x\,P''(x)$ et $x \to (x-1)\,P'(x)$ appartiennent à E_N. Leur différence également.

Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$$\boxed{\forall P \in E_N,\ T(P) \in E_N.}$$

23. D'après **Q8**, pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré i.

Donc pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est un élément de E_N.

$(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une famille orthogonale d'éléments **non nuls** de E_N. C'est donc une famille libre de cardinal $N+1$ de E_N qui est de dimension $N+1$. Alors c'est une base de E_N.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une base de } E_N.}$$

24. $\forall i \in [\![0, N]\!],\ T(L_i) = -i\,L_i$. Donc

$$\boxed{\text{la matrice de } T_N \text{ dans la base } (L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(0, -1, -2, \ldots, -N) \text{ de } \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{M_{(L_0, L_1, \ldots, L_N)}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -N \end{pmatrix}}.$$

25. Restons poli ! Oui T_N est diagonalisable car $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une base de E_N constituée de vecteurs propres de T_N ! ! !

$$\boxed{T_N \text{ est diagonalisable.}}$$

0 est valeur propre de T_N donc T_N n'est pas injectif et encore moins bijectif !

$$\boxed{T_N \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Partie IV : Nature d'une série de maximums

---

26. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\Big(n\,x^{n-1}\,e^{-x} + x^n\,(-e^{-x})\Big)$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\,x^{n-1}\,e^{-x}\,(n-x)$.

g_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in]0, n[,\ g_n'(x) > 0$ et $\forall x \in]n, +\infty[,\ g_n'(x) < 0$.

Ceci suffit pour dire que g_n est strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$.

Donc $\forall x \in [0, n[,\ g_n(x) < g_n(n)$ et $\forall x \in]n, +\infty[,\ g_n(n) > g_n(x)$ et ainsi $\forall x \in [0, n[\cup]n, +\infty[,\ g_n(x) < g_n(n)$.

Dans ces conditions, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ atteint en le seul point n.

$$\boxed{g_n \text{ admet un maximum } M_n \text{ sur } [0,+\infty[\text{ atteint en le seul point } n.\ M_n = g_n(n) = \frac{n^n\, e^{-n}}{n!}\cdot}$$

27. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = \ln(\sqrt{n+1}\, M_{n+1}) - \ln(\sqrt{n}\, M_n) = \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\ \frac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ \frac{M_{n+1}}{M_n}\right)\cdot$

$\dfrac{M_{n+1}}{M_n} = M_{n+1}\,\dfrac{1}{M_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}\, e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\ \dfrac{n!}{n^n\, e^{-n}} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n}\ \dfrac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}\ \dfrac{(n+1)\, n!}{(n+1)!} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}$. Alors :

$a_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ \frac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\ e^{-1}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\ e^{-1}\right).$

$a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ \ln \frac{n+1}{n} - 1 = n\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right].$

$1+\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Par produit :

$\left(1+\frac{1}{2\,n}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$

$\left(1+\dfrac{1}{2\,n}\right)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{4n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Alors :

$a_n = n\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

28. Il résulte de **Q27** que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}\cdot$ De plus la série de terme général $\dfrac{1}{12n^2}$ est convergente et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n \text{ converge.}}$$

29. Posons $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln \mu_n - \ln \mu_1 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\ln \mu_{k+1} - \ln \mu_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln \mu_n = \ln \mu_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \mu_n = \ln \mu_1 + S$ et ainsi la suite $(\ln \mu_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par continuité de la fonction exponentielle en ℓ, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln \mu_n} = e^\ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = e^\ell$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (\mu_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge et sa limite est strictement positive.}}$$

30. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = e^\ell$ et $e^\ell \neq 0$ donc $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\ell$. Ce qui donne $\sqrt{n}\, M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\ell$. Ainsi $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^\ell}{\sqrt{n}} = \dfrac{e^\ell}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{e^\ell}{n^{\frac{1}{2}}}$ est divergente, car $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$, et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } M_n \text{ diverge.}}$$

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

31. Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p_1(x,y) = x,\ p_2(x,y) = y$ et $p_3(x,y) = x+y$. $F = f \circ p_1 + f \circ p_2 - f \circ p_3$.

1. p_1, p_2, p_3 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car ce sont des fonctions polynômes.
2. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, p_1(x,y) \in]0,+\infty[,\ p_2(x,y) \in]0,+\infty[$ et $p_3(x,y) \in]0,+\infty[$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Alors par composition $f \circ p_1$, $f \circ p_2$ et $f \circ p_3$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

Donc F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ comme combinaison linéaire de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^2.}$$

Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. $\dfrac{\partial (f \circ p_1)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p_1}{\partial x}(x,y)\, f'\big(p_1(x,y)\big) = 1 \times f'(x) = f'(x)$.

$\dfrac{\partial (f \circ p_2)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p_2}{\partial x}(x,y)\, f'\big(p_2(x,y)\big) = 0 \times f'(y) = 0$.

$\dfrac{\partial (f \circ p_3)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p_3}{\partial x}(x,y)\, f'\big(p_3(x,y)\big) = 1 \times f'(x+y) = f'(x+y)$.

Alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) + 0 - f'(x+y) = f'(x) - f'(x+y)$. De même $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y) - f'(x+y)$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) - f'(x+y) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y) - f'(x+y).}$$

$\forall t \in]0,+\infty[, f(t) = t\, e^{-t}$ donc $\forall t \in]0,+\infty[, f'(t) = e^{-t} + t\,(-e^{-t}) = (1-t)\, e^{-t}$. Alors :

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (1-x)\, e^{-x} - (1-x-y)\, e^{-x-y} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (1-y)\, e^{-y} - (1-x-y)\, e^{-x-y}.}$$

Remarque *On obtient sans difficulté, pour tout élément (x,y) de $]0,+\infty[^2$:*

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x) - f''(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''(y) - f''(x+y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(x,y) = -f''(x+y)$.

32. Rappelons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[, f(t) = t\, e^{-t}$, $\forall t \in]0,+\infty[, f'(t) = (1-t)\, e^{-t}$ et $\forall t \in]0,+\infty[, f''(t) = -e^{-t} + (1-t)\,(-e^{-t}) = (t-2)\, e^{-t}$.

f' est continue sur $[2,+\infty[$ et f'' est strictement positive sur $]2,+\infty[$. Cela suffit pour dire que f' est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

Comme $f'(2) = -e^{-2}$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f'(t) = 0$ (par croissance comparée), f' définit une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[-e^{-2}, 0[$.

f' est continue sur $]0,2[$ et f'' est strictement négative sur $]0,2[$. f' est continue et strictement décroissante sur $]0,2[$.

Comme $\displaystyle\lim_{t \to 2^-} f'(t) = -e^{-2}$ et $\displaystyle\lim_{t \to 0} f'(t) = 1$, f' définit une bijection de $]0,2[$ sur $]-e^{-2}, 1[$.

Alors si λ est un réel, l'équation $f'(t)=\lambda$ admet au plus une solution dans $]0,2[$ et au plus une solution dans $[2,+\infty[$ donc au plus deux solutions dans $]0,+\infty[$.

Soit a dans $]0,+\infty[$. L'équation $x\in]0,+\infty[$ et $f(x)=f(a)$ admet a comme solution et admet au plus deux solutions.

Elle admet donc au plus une solution distincte de a.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } a \text{ de }]0,+\infty[, \text{ l'équation } x\in]0,+\infty[\text{ et } f'(x)=f'(a) \text{ admet au plus une solution distincte de } a.}$$

Exercice λ *est un réel. Trouver le nombre de solutions de l'équation* $x\in]0,+\infty[$ *et* $f'(x)=\lambda$.

En déduire, pour tout élément a *de* $]0,+\infty[$, *le nombre de solutions de l'équation* $x\in]0,+\infty[$ *et* $f'(x)=f'(a)$.

33. Soit (x,y) un élément de $]0,+\infty[^2$.

• Supposons que (x,y) est un point critique de F. Alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$.

Donc $f'(x)-f'(x+y)=f'(y)-f'(x+y)=0$. $f'(x+y)=f'(x)$ et $f'(y)=f'(x+y)=f'(x)$.

Donc y et $x+y$ sont deux solutions distinctes de l'équation $t\in]0,+\infty[$ et $f'(t)=f'(x)$. Alors d'apès **Q32** l'une d'entre elle est x.

Ainsi $x+y=x$ ou $x=y$. Notons que $x+y=x$ donne $y=0$ ce qui n'est pas donc $x=y$.

Alors $f'(2x)=f'(x+y)=f'(x)$. Finalement $y=x$ et $f'(2x)=f'(x)$.

Réciproquement supposons que $y=x$ et $f'(2x)=f'(x)$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=f'(x)-f'(x+y)=f'(x)-f'(2x)=0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=f'(y)-f'(x+y)=f'(x)-f'(2x)=0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$. Ainsi (x,y) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } (x,y) \text{ de }]0,+\infty[^2, (x,y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si } x=y \text{ et } f'(x)=f'(2x).}$$

34. Soit x un réel strictement positif.

$f'(x)=f'(2x)\Longleftrightarrow e^{-x}\,(1-x)=e^{-2x}\,(1-2x)\Longleftrightarrow e^{x}(1-x)=1-2x\Longleftrightarrow e^{x}(1-x)-1+2x=0$.

Posons $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ell(x)=e^{x}(1-x)-1+2x$. $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=f'(2x)\Longleftrightarrow \ell(x)=0$.

Montrons alors que ℓ s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$.

ℓ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ell'(x)=e^{x}\,(1-x)+e^{x}\,(-1)+2=2-x\,e^{x}$.

ℓ' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ell''(x)=-\,e^{x}-x\,e^{x}=-(x+1)\,e^{x}$. $\forall x\in]0,+\infty[,\ \ell''(x)<0$.

Alors ℓ' est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0}\ell'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-x\,e^{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x\,e^{x}\right)=-\infty$.

Alors ℓ' définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$. 0 appartient à $]-\infty,2[$ donc il existe un unique élément β dans $]0,+\infty[$ tel que $\ell'(\beta)=0$.

La stricte décroissance de ℓ' sur $]0,+\infty[$ permet de dire que $\forall x\in]0,\beta[,\ \ell'(x)>0$ et $\forall x\in]\beta,+\infty[,\ \ell'(x)<0$.

$\ell'(1)=2-e$ donc $\ell'(1)<0$. Alors $1\in]\beta,+\infty[$ et ainsi $\beta<1$.

- ℓ est strictement croissante sur $]0,\beta[$ et strictement décroissante sur $[\beta,+\infty[$.

- ℓ est continue sur $]0,\beta[$ et sur $[\beta,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\ell(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}\ell(x)=\ell(\beta)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell(x)=-\infty$.

Alors ℓ définit une bijection de $]0,\beta[$ sur $]0,\ell(\beta)[$ et de $[\beta,+\infty[$ sur $]-\infty,\ell(\beta)]$. Notons que $l(\beta)>0$. Alors :

1. $\forall x\in]0,\beta[,\ \ell(x)>0$. L'équation $x\in]0,\beta[$ et $\ell(x)=0$ n'a pas de solution.
2. $0\in]-\infty,\ell(\beta)]$ donc L'équation $x\in[\beta,+\infty[$ et $\ell(x)=0$ a une solution et une seule que nous noterons α.

Finalement l'équation $x\in]0,+\infty[$ et $\ell(x)=0$ admet une solution et une seule α.

Donc l'équation $x\in]0,+\infty[$ et $f'(x)=f'(2x)$ admet une solution et une seule α.

Ainsi, d'après **Q23** F admet un point critique et un seul (α,α).

ℓ est strictement décroissante sur $[\beta,+\infty[$. Rappelons aussi que $\beta<1$.

Alors comme $\ell(1)=1$, $\ell(\alpha)=0$ et $\ell(2)=3-e^2<0: 1<\alpha<2$.

$$\boxed{F \text{ admet un point critique et un seul que nous noterons } (\alpha,\alpha). \text{ De plus } 1<\alpha<2.}$$

35. $\forall x\in]0,+\infty[,\ f''(x)=(x-2)\,e^{-x}$.

$f''(\alpha)=(\alpha-2)\,e^{-\alpha}<0$ car $\alpha<2$ et $f''(2\,\alpha)=(2\,\alpha-2)\,e^{-2\,\alpha}=2\,(\alpha-1)\,e^{-2\,\alpha}>0$ car $\alpha>1$.

$$\boxed{f''(\alpha)<0 \text{ et } f''(2\,\alpha)>0.}$$

36. • F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur **l'ouvert** $]0,+\infty[^2$. Ainsi si F admet un extremum local en un point de $]0,+\infty[^2$, ce point est un point critique de F.

Or (α,α) est l'unique point critique de F sur $]0,+\infty[^2$, donc F admet au plus un extremum local sur $]0,+\infty[^2$ et si F admet un extremum local sur $]0,+\infty[^2$ il est atteint en (α,α).

• Regardons alors si F admet un extremum local en (α,α)

Nous avons déjà dit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ et que pour tout élément (x,y) de $]0,+\infty[^2$:

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=f''(x)-f''(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=f''(y)-f''(x+y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y)=-f''(x+y)$.

Posons $r=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha,\alpha)$, $s=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(\alpha,\alpha)$ et $t=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\alpha,\alpha)$.

$r=f''(\alpha)-f''(2\,\alpha)$, $s=-f''(2\,\alpha)$, $t=f''(\alpha)-f''(2\,\alpha)$.

$rt-s^2=\Big(f''(\alpha)-f''(2\,\alpha)\Big)^2-\Big(-f''(2\,\alpha)\Big)^2=\Big(f''(\alpha)\Big)^2-2\,f''(\alpha)\,f''(2\,\alpha)+\Big(f''(2\,\alpha)\Big)^2-\Big(f''(2\,\alpha)\Big)^2$.

$rt-s^2=f''(\alpha)\Big(f''(\alpha)-2\,f''(2\,\alpha)\Big)$.

Rappelons que $f''(\alpha)<0$ et $f''(2\,\alpha)>0$. Alors $f''(\alpha)<0$ et $f''(\alpha)-2\,f''(2\,\alpha)<0$ donc $rt-s^2>0$.

Ainsi, d'après le cours, F admet en (α,α) un extremum local (strict).

$r=f''(\alpha)<0$ donc il s'agit d'un maximum local.

Alors les deux points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{F \text{ admet un extremum local et un seul. Cet extremum local est un maximum.}}$$