EML LYON 2014

PROBLÈME 1

PARTIE I : Propriétés générales de T.

Q1 Soit f un élément de E. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (f est continue sur $\mathbb{R}$...).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \frac{1}{2}[F(x+1) - F(x-1)]$.

F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto F(x+1)$ et $x \mapsto F(x-1)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire $\underline{T(f) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{(T(f))'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)]}$.

Q2 • $\forall f \in E$, $T(f) \in E_1$ d'après Q1. Or E_1 est contenu dans E.

Ainsi $\forall f \in E, T(f) \in E$. T est une application de E dans E.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E \times E$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(\lambda f+g)(t)dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(\lambda f(t)+g(t))dt = \lambda\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} g(t)dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$.

$T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E \times E$, $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$. T est linéaire.

Ainsi $\underline{T \text{ est un endomorphisme de } E}$.

Q3 $\forall f \in E, T(f) \in E_1$ donc $\operatorname{Im} T \subset E_1$.

Or $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0. Ainsi $x \mapsto |x|$ appartient à E mais n'appartient pas à E_1. $x \mapsto |x|$ appartient à E mais n'appartient à $\operatorname{Im} T$.

Ainsi $\underline{T \text{ n'est pas surjectif}}$.

Q4 Soit $f \in E$. $t \mapsto -t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui doit sans doute autoriser le changement de variable $u = -t$ dans ce qui suit.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\,dt \underset{u=-t}{=} \frac{1}{2}\int_{x+1}^{x-1} f(-u)(-du) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-u)\,du.$

Si f est paire sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(u)\,du = T(f)(x).$

Si f est impaire sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(-f(u))\,du = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(u)\,du = -T(f)(x).$

Si f appartient à E et si f est paire sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Si f appartient à E et si f est impaire sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q5 Soit $f \in E$. Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x+1} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{x-1} f(t)\,dt.$

$\lim_{y \to +\infty} \int_0^y f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, $\lim_{x \to +\infty}(x+1) = \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty.$

Alors par composition et combinaison linéaire : $\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x+1}^{0} f(t)\,dt.$

$\lim_{y\to-\infty}\int_y^0 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$, $\lim_{y\to-\infty}(x-1) = \lim_{y\to-\infty}(x+1) = -\infty.$

Alors par composition et combinaison linéaire : $\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$

Si $f \in E$ et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \lim_{x\to-\infty} T(f)(x) = 0.$

Q6 s est continue sur $\mathbb{R}$ donc s appartient à E.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(s)(x) = \int_{x-1}^{x+1} s(t)\,dt = \int_{x-1}^{x+1} \sin(\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_{x-1}^{x+1} = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x + \pi) + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x - \pi)$

$\forall x \in \mathbb{R}, T(s)(x) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) = 0.$ Donc $T(s) = 0_E$ et $s \neq 0_E$.

Alors le noyau de T n'est pas réduit à 0_E. T n'est pas injectif.

PARTIE II : Premier exemple.

(Q7) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f_a(t)dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} e^{at}dt$.

$T(f_0)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} 1\,dt = \frac{1}{2}(x+1-x+1) = 1 = f_0(x)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$. $T(f_0) = f_0$.

Supposons $a \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{a}\left(e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{a}(e^a - e^{-a})e^{ax}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} f_a(x)$. $T(f_a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} f_a$.

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} f_a(x) & \text{si } a \neq 0 \\ f_a(x) & \text{si } a = 0 \end{cases}$. $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} f_a & \text{si } a \neq 0 \\ f_0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$.

(Q8) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $T(f_a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} f_a = \varphi(a) f_a$.

$T(f_0) = f_0 = \varphi(0) f_0$.

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a) f_a$.

(Q9) $a \mapsto e^a - e^{-a}$ est dérivable et $a \mapsto 2a$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi $a \mapsto \frac{e^a - e^{-a}}{2a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = \frac{1}{a}\left[\frac{e^a - e^{-a}}{2a} - 1\right] = \frac{1}{2a^2}\left[e^a - e^{-a} - 2a\right]$.

$e^a \underset{a \to 0}{=} 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + o(a^2)$ et $e^{-a} \underset{a \to 0}{=} 1 - a + \frac{1}{2}a^2 + o(a^2)$.

$e^a - e^{-a} - 2a \underset{a \to 0}{=} 1 + a + \frac{1}{2}a^2 - 1 + a - \frac{1}{2}a^2 - 2a + o(a^2)$

$e^a - e^{-a} - 2a \underset{a \to 0}{=} o(a^2)$; Alors $\lim_{a \to 0}\left(\frac{1}{2a}\left[e^a - e^{-a} - 2a\right]\right) = 0$.

Donc $\lim_{a \to 0} \frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = 0$. φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\varphi(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2a}$. Donc $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\varphi'(a) = \frac{1}{2a^2}\left[(e^a + e^{-a})a - (e^a - e^{-a})\right]$

$\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$, $\varphi'(a)=\frac{1}{2a^2}\left[(a-1)e^{a}+(a+1)e^{-a}\right]$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a\in\mathbb{R}$, $\varphi'(a)=\begin{cases}\frac{1}{2a^2}\left[(a-1)e^{a}+(a+1)e^{-a}\right] & \text{si } a\neq 0\\ 0 & \text{si } a=0.\end{cases}$

Posons $\forall a\in\mathbb{R}$, $\psi(a)=e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a\in\mathbb{R}$, $\psi'(a)=e^{a}(a-1)+e^{a}-e^{-a}(a+1)+e^{-a}=a(e^{a}-e^{-a})$.

$\forall a\in]-\infty,0[$, $a<0$ et $e^{a}-e^{-a}<0$ et $\forall a\in]0,+\infty[$, $a>0$ et $e^{a}-e^{-a}>0$.

Ainsi $\forall a\in]-\infty,0[$, $\psi'(a)>0$ et $\forall a\in]0,+\infty[$, $\psi'(a)>0$.

Alors $\psi'(\ )=0$ et $\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\psi'(a)>0$. ψ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $\psi(0)=1(0-1)+1\,(0+1)=0$.

Alors $\forall a\in]0,+\infty[$, $e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)>0$

$\forall a\in]-\infty,0[$, $e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)<0$

$e^{0}(0-1)+e^{-0}(0-1)=0$.

Rappelons que que $\forall a\in\mathbb{R}$, $\varphi'(a)=\begin{cases}\frac{1}{2a^2}\left(e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)\right) & \text{si } a\neq 0\\ 0 & \text{si } a=0\end{cases}$

Alors $\forall a\in]-\infty,0[$, $\varphi'(a)<0$; $\varphi'(0)=0$; $\forall a\in]0,+\infty[$, $\varphi'(a)>0$

ceci permet de dire que φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.

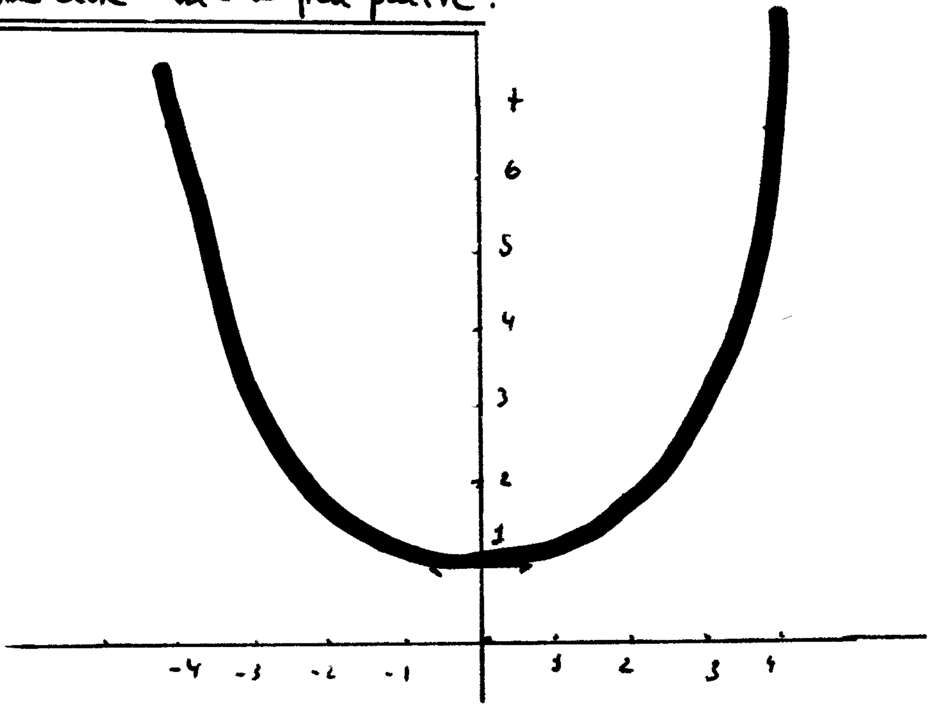
notons que φ est paire sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{a\to+\infty}\varphi(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{a}}{a}-\frac{1}{2}\frac{1}{ae^{a}}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{e^{a}}{a}=+\infty$ et $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{ae^{a}}=0$

$\lim\limits_{a\to+\infty}\varphi(a)=+\infty$ et comme φ est paire sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{a\to-\infty}\varphi(a)=+\infty$

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\varphi(a)}{a} = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{e^a}{a^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{a^2e^a}\right) = +\infty$$

Alors la courbe représentative admet une branche parabolique dans la direction de $(y'y)$ en $+\infty$. Même chose en $-\infty$ par parité.



(Q10)

Notons que φ est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus $\varphi(0)=1$ et $\lim_{a\to+\infty}\varphi(a)=+\infty$. Ainsi φ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

Soit $\lambda \in [1,+\infty[$. $\exists!\, a \in [0,+\infty[,\ \varphi(a)=\lambda$.

Alors $f_a \neq 0_E$ et $T(f_a)=\varphi(a)\,f_a=\lambda f_a$.

Donc pour tout $\lambda\in[1,+\infty[$, il existe $f\in E-\{0_E\}$, tel que $T(f)=\lambda f$.

Ainsi tout élément λ de $[1,+\infty[$ est valeur propre de T.

PARTIE III : Deuxième exemple

(Q1) $t\mapsto |t|+1$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. $t\mapsto \frac{1}{|t|+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $h: t\mapsto \frac{1}{|t|+1}$ est un élément de E.

Notons que h est paire sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in[0,1]$

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} h(t)\,dt \underset{x-1\leq 0 \text{ et } x+1>0}{=} \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} \frac{1}{-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{x+1}\frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\Big[-\ln|-t+1|\Big]_{x-1}^{0} + \frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_0^{x+1}$$

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\ln|-x+1+1| + \frac{1}{2}\ln|x+1+1| = \frac{1}{2}\ln(2-x) + \frac{1}{2}\ln(x+2) = \frac{1}{2}\ln(4-x^2).$$

Soit $x \in]1,+\infty[$.

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} h(t)\,dt \underset{x-1>0 \text{ et } x+1>0}{=} \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_{x-1}^{x+1} \underset{x+1+1>0 \text{ et } x>0}{=} \frac{1}{2}\ln(x+1+1) - \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{2}\ln(|x|+2) - \frac{1}{2}\ln|x|$$

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ T(h)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(4-x^2) \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}\ln(|x|+2) - \frac{1}{2}\ln|x| \text{ si } x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

Soit $x \in]-\infty,0[$. $T(h)(x) = T(h)(-x)$ et $-x \in]0,+\infty[$.

Alors si $x \in [-1,0[$, $T(h)(x) = T(h)(-x) \underset{-x\in]0,1]}{=} \frac{1}{2}\ln(4-(-x)^2) = \frac{1}{2}\ln(4-x^2)$.

Si $x \in]-\infty,-1[$, $T(h)(x) = T(h)(-x) \underset{-x\in]1,+\infty[}{=} \frac{1}{2}\ln(|-x|+2) - \frac{1}{2}\ln|-x| = \frac{1}{2}\ln(|x|+2) - \frac{1}{2}\ln|x|$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ T(h)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(4-x^2) & \text{si } x \in [-1,1] \\ \frac{1}{2}\ln(|x|+2) - \frac{1}{2}\ln|x| & \text{sinon} \end{cases}$

Rappelons que $T(h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R},\ (T(h))'(x) \underset{\ln(|x|+2)=\ln}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{4-x^2} \text{ si } x \in [-1,1] \\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x} \text{ si } x \in]1,+\infty[\\ \frac{1}{2}\,\frac{-1}{-x+2} - \frac{1}{2}\,\frac{-1}{(-x)} \text{ si } x \in]-\infty,-1[\end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (T(h))'(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-4} \text{ si } x \in [-1,1] \\ -\frac{1}{x(x+2)} \text{ si } x \in]1,+\infty[\\ \frac{1}{x(x-2)} \text{ si } x \in]-\infty,-1[\end{cases}$$

. Remarquons encore que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (T(h))'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-4} & \text{si } x\in[-1,1] \\ -\dfrac{1}{|x|(|x|+2)} & \text{si } x\in]1,+\infty[\\ \dfrac{1}{|x|(|x|+2)} & \text{si } x\in]-\infty,-1[\end{cases}.$$

Remarque.- Notons que $(T(h))'$ est impaire sur $\mathbb{R}$. Normal car c'est la dérivée de $T(h)$ qui est paire sur $\mathbb{R}$ car h est paire sur $\mathbb{R}$.

Exercice.- Retrouver ce résultat en utilisant le résultat de § 1.

$\forall x\in[0,1]$, $(T(h))'(x) = \dfrac{x}{x^2-4} \leq 0$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $(T(h))'(x) = -\dfrac{1}{(x)(x+2)} < 0$.

$\forall x\in[-1,0]$, $(T(h))'(x) = \dfrac{x}{x^2-4} \geq 0$ et $\forall x\in]-\infty,-1[$, $(T(h))'(x) = \dfrac{1}{x(x-2)} > 0$.

$(T(h))'$ est positive sur $]-\infty,0]$ et négative sur $[0,+\infty[$.

$T(\ )$ est croissante sur $]-\infty,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$.

$T(h)(0) = \frac{1}{2}\ln(4-0^2) = \ln 2$ et $(T(h))'(0) = 0$. $T(h)(0) \simeq 0,69$.

$T(h)(1) = \frac{1}{2}\ln(4-1^2) = \frac{1}{2}\ln 3$ et $(T(h))'(1) = -\frac{1}{3}$. $T(h)(1) \simeq 0,55$

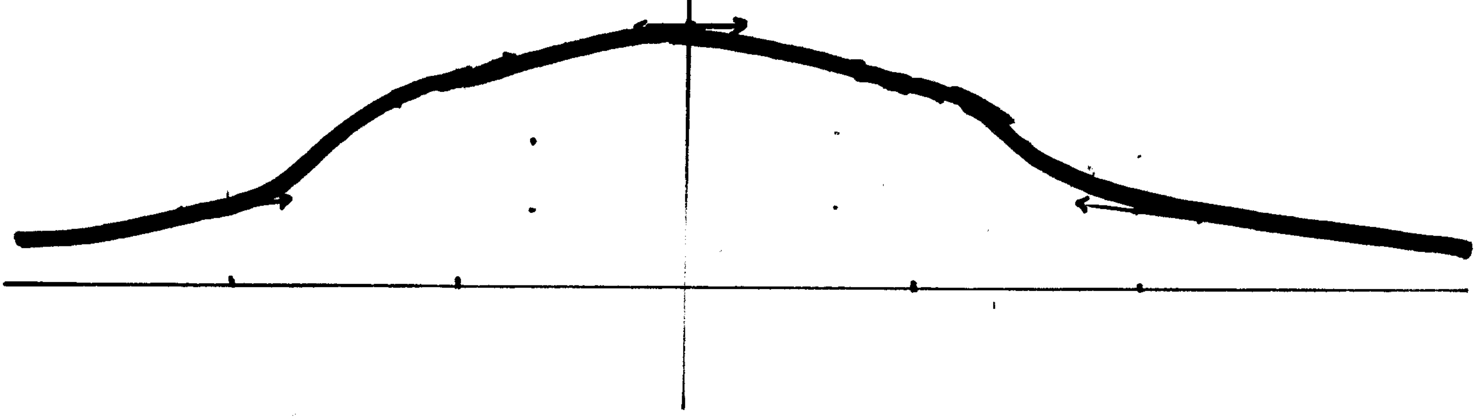
Rappelons que $T(h)$ est paire sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} T(h)(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(|x|+2) - \frac{1}{2}\ln|x|\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0.\quad \lim_{x\to+\infty} T(h) = 0$$

Notons que $T(h)(2) = \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0,35$ et $(T(h))'(2) = -\frac{1}{8}$

Remarque.- $T(h)$ est concave sur $[-1,1]$ et convexe sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$.
Notons que $T(h)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ mais pas 2 fois dérivable en $-1, 0, 1$.



Q13 Nous venons de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x)=0$. Comme $T(f)$ est paire sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} T(f)(x)=0$.

Or $\forall x\in[1,+\infty[$, $0\leq f(x)=\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

La réciproque du résultat au résultat de Q9 est fausse.

Partie IV : Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

Q14 • $(x,y)\to x$ est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$, F est C^2 sur $]1,+\infty[$ et $\forall(x,y)\in]1,+\infty[^2$, $x\in]1,+\infty[$. Alors par composition $(x,y)\to F(x)$ est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$.

• de même $(x,y)\to F(y)$ est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$

• $(x,y)\mapsto xy$ est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$ (fonction polynôme ...), F est de classe C^2 sur $]1,+\infty[$ et $\forall(x,y)\in]1,+\infty[^2$, $xy\in]1,+\infty[$.
Alors par composition $(x,y)\to F(xy)$ est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$.

Par combinaison linéaire, les trois points précédents montrent que H est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$.

H est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$ donc H est de classe C^1 sur $]1,+\infty[^2$!

$\forall(x,y)\in]1,+\infty[^2$, $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=1\times F'(x)+0\times F'(y)-2\times y\,F'(xy)$

$\forall(x,y)\in]1,+\infty[^2$, $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-2y\left(\frac{1}{xy+2}-\frac{1}{xy}\right)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}-\frac{2y}{xy+2}$.

$\forall(x,y)\in]1,+\infty[$, $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}-\frac{2y}{xy+2}$. "Par symétrie" :

$\forall(x,y)\in]1,+\infty[$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y}-\frac{2x}{xy+2}$.

notons que si (x,y) appartient à $]1,+\infty[^2$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{2y^2}{(xy+2)^2},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}(x,y)=-\frac{4}{(xy+2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{1}{(y+2)^2}-\frac{1}{y^2}+\frac{2x^2}{(xy+2)^2}.$$

Q15 Rappelons que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[^2$. Soit $(x,y)\in]1,+\infty[^2$.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}-\frac{2y}{xy+2}=0 \Leftrightarrow (x+x+2)(xy+2)-2y(x)(x+2)=0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=0 \Leftrightarrow 0=(x+1)(xy+2)-x(x+2)y=x^2y+2x+xy+2-x^2y-2xy=2x+2-xy.$$

De même $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=0$ si et seulement $2y+2-xy=0$.

Alors
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+2-xy=0\\ 2y+2-xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=2x+2\\ 0=2y+2-2x-2=2(y-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ x^2=2x+2\end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ x^2-2x+1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ (x-1)^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y=\sqrt3+1\\ \text{ou}\\ x=y=-\sqrt3+1\end{cases} \underset{(x,y)\in]1,+\infty[^2}{\Leftrightarrow} x=y=1+\sqrt3$$

Ainsi H possède un point critique et un seul $(1+\sqrt3,1+\sqrt3)$.

Q15 Nous avons vu plus haut que H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$ et nous avons calculé les dérivées partielles secondes.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0)\underset{x_0=y_0}{=}-\frac{1}{(x_0+2)^2}-\frac{1}{x_0^2}+\frac{2x_0^2}{(x_0^2+2)^2}=-\frac{1}{(3+\sqrt3)^2}-\frac{1}{(1+\sqrt3)^2}+\frac{2(1+\sqrt3)^2}{((1+\sqrt3)^2+2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0)=-\frac{(3-\sqrt3)^2}{6^2}-\frac{(\sqrt3-1)^2}{2^2}+\frac{2(1+\sqrt3)^2}{4(3+\sqrt3)^2}=-\frac{(3-\sqrt3)^2}{6^2}-\frac{(\sqrt3-1)^2}{4}+\frac{(1+\sqrt3)^2}{2\times3\times(\sqrt3+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0)=-\frac{1}{36}(9+3-6\sqrt3)-\frac14(3+1-2\sqrt3)+\frac16=\frac16(-2+\sqrt3-6+3\sqrt3+1)=\frac16(4\sqrt3-7)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0)=\frac16(4\sqrt3-7)\approx-1{,}2\times10^{-2}\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac16(4\sqrt3-7)\simeq-1{,}2\times10^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{4}{(x_0y_0+2)^2}=-\frac{4}{((1+\sqrt3)^2+2)^2}=-\frac{4}{(6+2\sqrt3)^2}=-\frac{4}{4(3+\sqrt3)^2}=-\frac{(3-\sqrt3)^2}{(9-3)^2}=-\frac{1}{36}(9+3-6\sqrt3)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = -\frac{1}{6}(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{6}(\sqrt{3}-2) \simeq -4{,}5 \times 10^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 = \left(\frac{1}{6}(4\sqrt{3}-7)\right)^2 - \left(\frac{1}{6}(\sqrt{3}-2)\right)^2$$

$$= \frac{1}{36}\left[48+49-56\sqrt{3}-3-4+4\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left[90-52\sqrt{3}\right] = \frac{1}{18}(45-26\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{18}\,\frac{(45)^2-(26\times\sqrt{3})^2}{45+26\sqrt{3}} = \frac{1}{18}\,\frac{2025-2028}{45+26\sqrt{3}} = \frac{-1}{6(45+26\sqrt{3})}$$

Ainsi $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 < 0$.

H n'admet pas d'extremum local sur $]1,+\infty[^2$.

Remarque.. Pour être plus précis...

1/ (x_0,y_0) est le seul point critique de H.

2/ H est de classe C^1 sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$ donc si H admet un extremum local en un point de $]1,+\infty[^2$ ce point est un point critique de H, c'est donc (x_0,y_0)

3/ H est de classe C^2 sur $]1,+\infty[^2$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) < 0$.

Les trois points précédents montrent que H n'a pas d'extremum local sur $]1,+\infty[^2$.

PARTIE V : Transformée d'une densité.

Q17 Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. $T(f)$ et $x \mapsto x$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie l'intégration par partie qui suit.

$$\int_A^B T(f)(u)\,du = \int_A^B 1 \times T(f)(x)\,dx = \left[x\,T(f)(x)\right]_A^B - \int_A^B x\,(T(f))'(x)\,dx.$$

$$\int_A^B T(f)(x)\,dx = B\,T(f)(B) - A\,T(f)(A) - \int_A^B x\,\frac{1}{2}\left(f(x+1)-f(x-1)\right)dx.$$

$\int_A^B T(f)(x)\,dx = B\,T(f)(B) - A\,T(f)(A) - \frac{1}{2}\int_A^B x\,f(x+1)\,dx + \frac{1}{2}\int_A^B x\,f(x-1)\,dx$. En faisant deux petits changements de variable il vient:

$\int_A^B T(f)(x)dx = BT(f)(B) - AT(f)(A) - \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1}(x-1)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1}(x+1)f(x)dx$.

$\int_A^B T(f)(x)dx = BT(f)(B) - AT(f)(A) - \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} x f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(x)dx$.

Notons que $-\frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} x f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{A+1}^{A-1} x f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} x f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx$.

$$= \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} x f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} x f(x)dx.$$

Alors $\int_A^B T(f)(x)dx = B\frac{1}{2}\int_{B-1} f(x)dx - A\frac{1}{2}\int_{A-1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} x f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} x f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(x)dx$.

$$\int_A^B T(f)(x)dx = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(x)dx.$$

Q18 Soit $B \in \mathbb{R}$.

$\left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx\right| \underset{\uparrow\ f \text{ est positive sur } \mathbb{R}}{\leq} \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}|B-x|f(x)dx \underset{\uparrow\ B-x\in[-1,1]}{\leq} \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} f(x)dx = T(f)(B)$.

$$\underline{\forall B \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx\right| \leq T(f)(B).}$$

de même $\forall A \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx\right| \leq T(f)(A)$!

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge donc $\lim_{B\mapsto+\infty} T(f)(B) = \lim_{A\mapsto-\infty} T(f)(A) = 0$.

Ainsi par encadrement : $\lim_{B\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx\right) = 0$ et $\lim_{A\mapsto-\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx\right) = 0$.

rappelons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Alors pour tout A dans $\mathbb{R}$, $\lim_{B\mapsto+\infty}\int_A^B T(f)(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{+\infty} f(x)dx$

donc pour tout A dans $\mathbb{R}$, $\int_A^{+\infty} T(f)(x)dx \underset{\text{converge et vaut}}{=} -\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{+\infty} f(x)dx$

En particulier $\int_0^{+\infty} T(f)(x)dx$ converge et vaut $-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))dx + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx$.

De même pour tout $B \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{A \mapsto -\infty} \int_A^B T(f)(x)dx = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B-1} f(x)dx$.

Alors pour tout $B \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{B} T(f)(x)dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B-1}(B-x)f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B-1} f(x)dx$

En particulier $\int_{-\infty}^{0} T(f)(x)dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(x)dx$ converge et vaut $-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))dx +$
$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ ou $\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(x)dx$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ donc 1.

Rappelons que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leq x+1$ et f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \geq 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) \geq 0$.

Ceci achève de montrer que si $f \in E$ et si f est une densité de probabilité, $T(f)$ est une densité de probabilité.

PROBLÈME 2

Partie I : Quelques généralités

(Q1) • $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $AM \in M_n(\mathbb{R})$ et $MA \in M_n(\mathbb{R})$.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\phi_A(M) = AM - MA \in M_n(\mathbb{R})$.

ϕ_A est une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(M,N) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$.

$\phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (M,N) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $\phi_A(\lambda M + N) = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N)$. ϕ_A est linéaire.

Ainsi ϕ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

(Q2) $\phi_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi I_n est un élément non nul du noyau de ϕ_A. Donc ϕ_A n'est pas un endomorphisme injectif de $M_n(\mathbb{R})$. $M_n(\mathbb{R})$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ϕ_A ne peut pas être surjectif car il n'est pas injectif.

ϕ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ ni injectif ni surjectif.

Partie II : Étude d'un cas particulier

(Q3) A est une matrice triangulaire supérieure de $M_2(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont 1 et 3.

Alors le spectre de A est $\{1,3\}$. Comme $1 \neq 3$ et que $A \in M_2(\mathbb{R})$:

A est diagonalisable et $\operatorname{Sp} A = \{1,3\}$.

(Q4) $\phi_A(E_{1,1}) = AE_{1,1} - E_{1,1}A = \begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} = -E_{1,2}$.

$\phi_A(E_{1,2}) = AE_{1,2} - E_{1,2}A = \begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix} = -2E_{1,2}$.

$\phi_A(E_{2,1}) = AE_{2,1} - E_{2,1}A = \begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{2,1} - E_{2,2}$.

$\phi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$

Ainsi la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im}\phi_A = \operatorname{Vect}(\phi_A(E_{1,1}), \phi_A(E_{1,2}), \phi_A(E_{2,1}), \phi_A(E_{2,2})) = \operatorname{Vect}(-E_{1,2}, -2E_{1,2}, E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2}, E_{1,2})$.

$\operatorname{Im}\phi_A = \operatorname{Vect}(E_{1,2}, E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2})$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha E_{1,2} + \beta(E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2}) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

$\beta E_{1,1} + \alpha E_{1,2} + 2\alpha E_{2,1} - \beta E_{2,2} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$:

$\beta = \alpha = 2\alpha = -\beta = 0$. $\alpha = \beta = 0$.

ceci achève de montrer que la famille $(E_{1,2}, E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2})$ est libre.

c'est donc une famille génératrice et libre de deux éléments de $\operatorname{Im}\phi_A$.

c'est donc une base de cardinal 2 de $\operatorname{Im}\phi_A$.

Ainsi $\dim \operatorname{Im}\phi_A = 2$. Le rang de ϕ_A est 2.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Remarque.- Alors Ker ϕ_A est de dimension 2. Ainsi 0 est valeur propre de ϕ_A et $\dim SEP(\phi_A, 0) = 2$.

Il est aisé alors de montrer que $SEP(\phi_A, 0) = \operatorname{Vect}(E_{1,1}+E_{2,2}, 2E_{1,1}-E_{2,2})$

Q5 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $M = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$.

$\phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x \\ -x-2y+t = \lambda y \\ 2z = \lambda z \\ -z = \lambda t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x = -\lambda t \\ (2-\lambda)z = 0 \\ x + (2+\lambda)y - t = 0 \end{cases}$

1er cas.- $\lambda = 0$

$\phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \phi_A(M) = 0_{M_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow M \in \operatorname{Ker}\phi_A$.

Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker}\phi_A = \dim M_2(\mathbb{R}) - \operatorname{rg}\phi_A = 4-2 = 2$. Ainsi 0 est valeur propre de ϕ_A et $\dim SEP(\phi_A, 0) = 2$.

Exercice.- montrer que $(E_{1,1}+E_{2,2}, 2E_{1,1}\ E_{1,2})$ est une base de $SEP(A,0)$

2ième cas.. $\lambda \neq 0$

$$\phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} t = -z \\ z = \lambda x \\ -(2+\lambda)y = 0 \\ x + (2+\lambda)y - t = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda = 2$

$$\phi_A(M) = 2M \Leftrightarrow \begin{cases} t = -z \\ z = 2x \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -4y \\ t = 2y \end{cases}.$$

$Ker(\phi_A - 2Id_{M_2(\mathbb{R})}) = Vect(-2E_{1,1} + E_{1,2} - 4E_{2,1} + 2E_{2,2})$.

Ainsi 2 est valeur propre de ϕ_A et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) $\lambda \neq 2$

$$\phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \lambda x = 0 \\ t = -z \\ 2x + (2+\lambda)y = 0 \end{cases} \overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \\ (\lambda+2)y = 0 \end{cases}$$

si $\lambda \neq -2$ $\quad \phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et λ n'est pas valeur propre de ϕ_A.

Supposons $\lambda = -2$. $\quad \phi_A(M) = -2M \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases}$.

Alors $Ker(\phi_A(M) - (-2)Id_{M_2(\mathbb{R})}) = Vect(E_{1,2})$.

-2 est valeur propre de ϕ_A et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Les valeurs propres de ϕ_A sont : $-2, 0, 2$.

$\dim SEP(\phi_A, -2) + \dim SEP(\phi_A, 0) + \dim SEP(\phi_A, 2) = 1 + 2 + 1 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$.

Ainsi ϕ_A est diagonalisable.

Remarque.. $Sp\,\phi_A = \{\lambda - \mu \,;\, (\lambda, \mu) \in Sp\,A\}$ car $Sp\,A = \{1, 3\}$ et $Sp\,\phi_A = \{-2, 0, 2\}$

Exercice.- Trouver une base de $M_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ϕ_A.

Remarque.. Nous aurions pu aller beaucoup plus vite pour trouver les valeurs propres de ϕ_A et la dimension de ses sous-espaces propres.

PARTIE III : Étude du cas où A est diagonalisable

Q6 A est diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

Alors $D = {}^tD = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = {}^tP\,{}^tA\,({}^tP)^{-1}$.

Ainsi ${}^tA$ est semblable à la matrice diagonale D. ${}^tA$ est diagonalisable.

De plus $Sp\,{}^tA = Sp\,D = Sp\,A$.

A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

Q7 • Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $X\,{}^tY = (x_i\, y_j)$ et X et Y sont des vecteurs propres.

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\exists (i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$. Donc $X\,{}^tY$ possède un élément non nul. $X\,{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

• $\phi_A(X\,{}^tY) = AX\,{}^tY - X\,{}^tY A = (AX)\,{}^tY - X\,{}^t({}^tAY)$.

X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^tA$).

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $AX = \lambda X$ et $\exists \mu \in \mathbb{R}$, ${}^tAY = \mu Y$.

Ainsi $\phi_A(X\,{}^tY) = \lambda X\,{}^tY - X\,{}^t(\mu Y) = \lambda X\,{}^tY - X(\mu\,{}^tY) = (\lambda - \mu)\, X\,{}^tY$.

$\phi_A(X\,{}^tY) = (\lambda - \mu)\, X\,{}^tY$

Ainsi $X\,{}^tY$ est un vecteur propre de ϕ_A.

Q8 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, $V_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ et

$V_j = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell Y_\ell$

Alors $V_i\,{}^tV_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right)^t\left(\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell Y_\ell\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell\, {}^tY_\ell\right)$

Donc $V_i\,{}^tV_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_k \mu_\ell\, X_k\,{}^tY_\ell$. $V_i\,{}^tV_j \in \mathrm{Vect}\left((X_k\,{}^tY_\ell)_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2}\right) = \mathrm{Vect}\, \mathcal{F}$

$V_i\,{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ et ceci pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Alors le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ contient le sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(V_i{}^tV_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ qui n'est autre que la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ est contenu dans $M_n(\mathbb{R})$ et contient $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc $M_n(\mathbb{R})$.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $M_n(\mathbb{R})$ de cardinal n^2 et $\dim M_n(\mathbb{R})=n^2$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

Q9 A et ${}^tA$ sont diagonalisables.

Soit $(U_1,U_2,\dots,U_n)$ (resp. $(T_1,T_2,\dots,T_n)$) une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (resp ${}^tA$).

1) $(U_i{}^tT_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ d'après Q 8.

2) Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $U_i{}^tT_j$ est un vecteur propre de ϕ_A d'après Q7.

Ainsi $(U_i{}^tT_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ϕ_A. ϕ_A est diagonalisable.

Q10 Reprenons les notations de Q 9. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ notons u_i la valeur propre de A associé à U_i. Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ notons t_j la valeur propre de ${}^tA$ associée à T_j. $(U_i{}^tT_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $U_i{}^tT_j$ est un vecteur propre de ϕ_A associé à la valeur propre u_i-t_j. Alors $Sp\,\phi_A=\{u_i-t_j\,;\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\}$.

Or $Sp\,A=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ et $Sp\,{}^tA=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$.

Ainsi $Sp\,\phi_A=\{\lambda-\mu\,;\,(\lambda,\mu)\in Sp\,A\times Sp\,{}^tA\}=\{\lambda-\mu\,;\,(\lambda,\mu)\in(Sp\,A)^2\}$

$Sp\,{}^tA=Sp\,A$ (d'après Q6).

$Sp\,\phi_A=\{\lambda-\mu\,;\,(\lambda,\mu)\in(Sp\,A)^2\}$

PARTIE IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

(Q11) • $\Phi_A(T^0) = \Phi_A(I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \lambda \times 0 \times I_n = \lambda \times 0 \times T^0$.

La propriété est vraie pour $k=0$

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$\Phi_A(T^{k+1}) = AT^{k+1} - T^{k+1}A = (AT^k)T - T^{k+1}A \underset{1}{=} (T^kA + \lambda k T^k)T - T^{k+1}A$.

hypothèse de récurrence... $AT^k + T^kA = \lambda k T^k$.

$\Phi_A(T^{k+1}) = T^kAT + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1}A \underset{4}{=} T^k(TA + \lambda T) + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1}A$.

$\Phi_A(T) = \lambda T$... $AT - TA = \lambda T$.

$\Phi_A(T^{k+1}) = T^{k+1}A + \lambda T^{k+1} + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1} = \lambda(k+1)T^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.

Posons $\mathcal{S} = \{k \in [\![0, n^2]\!] \mid T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Supposons $\mathcal{S}$ vide. Alors $\forall k \in [\![0, n^2]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall k \in [\![0, n^2]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\Phi_A(T^k) = (\lambda k)T^k$.

Ainsi $0, \lambda, \dots, \lambda \times n^2$ sont n^2+1 valeurs propres deux à deux distinctes (λ est différent de 0...) de Φ_A qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n^2. Ceci est impossible. Alors $\mathcal{S} \neq \emptyset$. $\exists q \in [\![0, n^2]\!]$, $T^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Notons que $T^0 = I_n \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi il existe un entier q de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $q \leq n^2$.

Posons $\hat{\mathcal{S}} = \{k \in \mathbb{N}^*,\ T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. D'après ce qui précède $\hat{\mathcal{S}}$ n'est pas vide car il contient q.

$\hat{\mathcal{S}}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Alors $\hat{\mathcal{S}}$ possède un plus petit élément p.

$p \in \mathbb{N}^*$, $T^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $T^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

(Q13) $T^{p-1} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors T^{p-1} possède une colonne non nul.

Alors $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $T^{p-1} V_{j_0} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. ($\forall k \in [\![1,n]\!]$, $T^{p-1}V_k$ est la $k^{\text{ième}}$ colonne de T^{p-1}).

Ainsi $\underline{\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ T^{p-1}X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}}$.

Soit $(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1})\in\mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{l=0}^{p-1}\gamma_l T^l X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Montrons par récurrence sur k que $\forall k \in [\![0,p-1]\!]$, $\forall i\in[\![0,k]\!]$, $\gamma_i=0$. $\forall j \in [\![p,+\infty[\![$, $T^j = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

- $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = T^{p-1}0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = T^{p-1}\left(\sum_{l=0}^{p-1}\gamma_l T^l X\right) = \sum_{l=0}^{p-1} \gamma_l T^{p-1+l}X \overset{\downarrow}{=} \gamma_0 T^{p-1}X$.

  Or $T^{p-1}X\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\gamma_0=0$.

- Soit $k \in [\![0,p-2]\!]$ tel que $\forall i\in[\![0,k]\!]$, $\gamma_i=0$. Montrons que $\forall i \in [\![0,k+1]\!]$, $\gamma_i=0$.

  Il ne reste plus qu'à montrer que $\gamma_{k+1}=0$.

  $\sum_{r=0}^{p-1}\gamma_r T^r X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par hypothèse de récurrence : $\sum_{r=k+1}^{p-1}\gamma_r T^rX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

  $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = T^{p-2-k}\left(0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = T^{p-2-k}\left(\sum_{r=k+1}^{p-1}\gamma_r T^r X\right) = \sum_{r=k+1}^{p-1}\gamma_r T^{p-2-k+r}X \underset{\uparrow}{=} \gamma_{k+1}T^{p-1}X$.

  $\forall j\in[\![p,+\infty[\![$, $T^j=0_{M_n(\mathbb{R})}$

  Or $T^{p-1}X\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\gamma_{k+1}=0$. Ce qui achève la récurrence.

  La propriété est vraie pour $p-1$ donc $\forall i\in[\![0,p-1]\!]$, $\gamma_i=0$.

  Alors $\forall(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1})\in\mathbb{R}^p$, $\sum_{k=0}^{p-1}\gamma_k T^k X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow \gamma_0=\gamma_1=\dots=\gamma_{p-1}=0$

<u>Ainsi $(X,TX,\dots,T^{p-1}X)$ est une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

Cette famille est de cardinal p et la dimension de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est n.

Alors $\underline{p\le n}$.

PARTIE V : Étude du cas où A est symétrique.

(Q14)
- Notons que $(\cdot|\cdot)$ est une application de $M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $M=(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $N=(n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $P=(p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$

  $\to (\lambda M+N|P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda m_{i,j}+n_{i,j})p_{i,j} = \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}p_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{i,j}p_{i,j}$.

  $(\lambda M+N|P)=\lambda(M,P)+(N|P)$.

$\rightarrow$ $(M|N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, n_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}\, m_{i,j} = (N|M)$.

$\rightarrow$ $(M|M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2 \geqslant 0$.

$\rightarrow$ Supposons que $(M|M)=0$. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^{2} = 0$ et $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij}^2 \geqslant 0$

Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j}^2 = 0$

donc $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j}=0$. Ainsi $M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Résumons. 1/ $(\cdot|\cdot)$ est une application de $M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

2/ $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (M,N,P)\in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $(\lambda M+N|P) = \lambda(M|P)+(N|P)$.

3/ $\forall (M,N)\in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $(M|N)=(N|M)$.

4/ $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $(M|M)\geqslant 0$.

5/ $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $(M|M)=0 \Rightarrow M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Ceci suffit pour dire que <u>$(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.</u>

<u>Remarque</u>.. $(\cdot|\cdot)$ est le produit canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
C'est l'unique produit scalaire de $M_n(\mathbb{R})$ qui rend la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ orthonormée.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $\forall (M,N)\in(M_n(\mathbb{R}))^2$, $(M|N) = \underset{\text{trace}}{tr}({}^tMN)$

Q15 Soient $M=(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N=(n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$. Posons $I_n = (\delta_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $M{}^tN = (p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et $p_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell}\, n_{j,\ell}$.

$(M{}^tN, I_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\,\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell}\, n_{i,\ell} = (M|N)$.

<u>$\forall (M,N)\in(M_n(\mathbb{R}))^2$, $(M|N) = (M{}^tN, I_n)$.</u>

Q16 Notons que $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A.(*)
Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\langle C_i, C_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

(*) car P est orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Q17 Posons $\forall j\in [\![1,n]\!]$, $C_j = \begin{pmatrix} d_1^{(j)} \\ d_2^{(j)} \\ \vdots \\ d_n^{(j)} \end{pmatrix}$. ← On aurait pu poser $P=(P_{i,j})$. Alors $\forall j\in [\![1,n]\!]$, $C_j = \begin{pmatrix} P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ \vdots \\ P_{n,j} \end{pmatrix}$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $C_i{}^tC_j = \left(d_p^{(i)}\times d_q^{(j)}\right)_{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2}$

Pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, les coefficients diagonaux de $C_i{}^tC_j$ sont $d_1^{(i)}d_1^{(j)}, d_2^{(i)}d_2^{(j)}, \dots, d_n^{(i)}d_n^{(j)}$. ou $P_{1,i}\times P_{1,j}, P_{2,i}\times P_{2,j}, \dots, P_{n,i}\times P_{n,j}$ avec $P=(P_{i,j})$.

$(C_i{}^tC_j \mid I_n)$ est la somme des éléments diagonaux de $C_i{}^tC_j$ pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$.

$(C_i{}^tC_j\mid I_n) = \sum_{\ell=1}^{n} d_\ell^{(i)}d_\ell^{(j)} = \langle C_i, C_j\rangle = {}^tC_iC_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$.

Alors $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $(C_i{}^tC_j\mid I_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Q18 Soit $(i,j,k,\ell)\in [\![1,n]\!]^4$. $(C_i{}^tC_j \mid C_k{}^tC_\ell) = (C_i{}^tC_j{}^t(C_k{}^tC_\ell)\mid I_n)$.

$(C_i{}^tC_j\mid C_k{}^tC_\ell) = (C_i{}^tC_jC_\ell{}^tC_k \mid I_n)$.

Si $j\neq \ell$: ${}^tC_jC_\ell = 0$ et : $(C_i{}^tC_j\mid C_k{}^tC_\ell) = (0_{M_n(\mathbb{R})}\mid I_n) = 0$.

Si $j=\ell$ ${}^tC_jC_\ell = 1$ et : $(C_i{}^tC_j\mid C_k{}^tC_\ell) = (C_i{}^tC_k\mid I_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $(C_i{}^tC_j\mid C_k{}^tC_\ell) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=k \text{ et } j=\ell \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$\forall (i,j,k,\ell)\in \mathbb{R}^4$, $(C_i{}^tC_j\mid C_k{}^tC_\ell) = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j)=(k,\ell) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Q19 D'après Q18, $\mathcal{G}$ est une famille orthonormée de cardinal n^2 de $(M_n(\mathbb{R}), (\cdot\mid\cdot))$ et $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$

Alors $\mathcal{G}$ est une base orthonormée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid (\cdot\mid\cdot))$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, c_i et c_j sont des vecteurs propres de A et A est symétrique.

Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, c_i est un vecteur propre de A et c_j un vecteur propre de ${}^tA$.

Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_i\,{}^tc_j$ est un vecteur propre de ϕ_A.

Alors $\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot\mid\cdot)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de ϕ_A.

Exercice.- Montrer que ϕ_A est un endomorphisme symétrique de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\cdot\mid\cdot))$.