PRÉLIMINAIRES

Q1 • $C(u) \subset \mathcal{L}(E)$.

• $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $0_{\mathcal{L}(E)} \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u \circ 0_{\mathcal{L}(E)}$; ainsi $0_{\mathcal{L}(E)} \in C(u)$. $C(u) \neq \emptyset$.

• Soit $(v,w) \in C(u) \times C(u)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ (\lambda v + w)\circ u = \lambda v \circ u + w \circ u \underset{\substack{\text{car } v \in C(u) \\ w \in C(u)}}{=} \lambda u \circ v + u \circ w = u \circ (\lambda v + w).$$

Ainsi $\lambda v + w \in C(u)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (v,w) \in C(u) \times C(u)$, $\lambda v + w \in C(u)$.

Donc $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $Id_E \circ u = u = u \circ Id_E$; $Id_E \in C(u)$. Alors $\mathrm{Vect}(Id_E) \subset C(u)$.

Comme $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$: $\dim \mathrm{Vect}(Id_E) = 1$. Donc $\dim C(u) \geq 1$

Remarque.. $\mathrm{Vect}(Id_E) \subset C(u)$ donc l'ensemble (ou l'espace vectoriel) des homothéties vectorielles de E est contenu dans $C(u)$.

Q2 Soit $v \in \mathbb{R}[u]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $v = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k$

$$u \circ v = u \circ \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, u \circ u^k = \sum_{k=0}^{r} a_k u^{k+1} = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k \circ u = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) \circ u = v \circ u$$

$\forall v \in \mathbb{R}[u]$, $v \in C(u)$. Ainsi $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$... en fait $\mathbb{R}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $C(u)$...

Q3 Soit $x \in E_\lambda$. $u(x) = \lambda x$. $u \circ v = v \circ u$ donc $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$.

Donc $u(v(x)) = \lambda v(x)$. Alors $v(x) \in E_\lambda$.

$\forall x \in E_\lambda$, $v(x) \in E_\lambda$. E_λ est stable par v.

Les sous-espaces propres de u sont stables par tous les éléments de $C(u)$.

R

PARTIE II Etude d'un exemple

(Q4) a) $\forall x \in]-1,1[$, $|1 \times x^n| = |x|^n$. Or pour tout x dans $]-1,1[$ la série de terme général $|x|^n$ converge. Donc pour tout x dans $]-1,1[$ la série de terme général $|1 \times x^n|$ converge.

<u>La suite constante égale à 1 appartient à A.</u>

b) Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^s)$ avec s dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]-1,1[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n^2 |a_n x^n|\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\frac{a_n}{n^s}\right| \times n^{s+2} |x|^n\right) = 0 \times 0$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^s} = 0$ puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^s)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{s+2}|x|^n) = 0$ par croissance comparée ($|x|<1$).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 |a_n x^n|) = 0$. 1) $|a_n x^n| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n x^n| \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|a_n x^n|$ converge et ceci pour tout $x \in]-1,1[$. Donc $(a_n)_{n\geq 0} \in A$.

Si $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et s'il existe s dans $\mathbb{R}$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^s)$, alors $(a_n)_{n\geq 0} \in A$.

---

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = 0$. $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$. Donc <u>$(\alpha_n)_{n\geq 0} \in A$.</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\beta_n}{n^2}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{n^2} = 0$. $\beta_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$. Donc <u>$(\beta_n)_{n\geq 0} \in A$.</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\gamma_n}{n^2}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} = 0$; $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$. Donc <u>$(\gamma_n)_{n\geq 0} \in A$.</u>

(Q5) a) Notons $\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles.

- $H \subset \mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$.
- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. $(a_n)_{n\geq 0} \in A$!

Posons $\forall x \in]-1,1[$, $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f_0 \in H$. H n'est pas vide.

- Soit f et g deux éléments de H. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (a_n)_{n\geq 0} \in A$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$\exists (b_n)_{n\geq 0} \in A$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $(\lambda f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$. Montrons que $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0}$ appartient à A. Nous pourrons alors dire que $\lambda f + g \in H$.

Soit $x \in]-1,1[$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |(\lambda a_n + b_n) x^n| \leq |\lambda a_n x^n| + |b_n x^n| = |\lambda|\,|a_n x^n| + |b_n x^n|$.

2) $(a_n)_{n\geq 0} \in A$, $(b_n)_{n\geq 0} \in A$ donc les séries de termes généraux $|a_n x^n|$ et $|b_n x^n|$ convergent. Alors la série de terme général $|\lambda|\,|a_n x^n| + |b_n x^n|$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|(\lambda a_n + b_n) x^n|$.

Ceci achève de montrer que $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0} \in A$. Donc $\lambda f + g \in H$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in H^2$, $\lambda f + g \in H$.

H est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

b) Pour $\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n$, $\hat{\psi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n x^n$ et $\hat{\delta}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n x^n$

$\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ et $\hat{\delta}$ sont des éléments de H car $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ et $(\delta_n)_{n\geq 0}$ sont des éléments de A

$\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2}{2-x}=2\,\varphi(x)$.

Donc $\varphi=\frac{1}{2}\hat{\varphi}$. Or $\hat{\varphi}\in H$ et H est un sous-espace vectoriel. Donc $\underline{\varphi \in H}$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\psi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}=\psi(x)$. $\psi=\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}\in H$. $\underline{\psi\in H}$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\delta}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(-1)^n x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n(-x)^n=-x\sum_{n=1}^{+\infty}n(-x)^{n-1}=-x\times\frac{1}{(1-(-x))^2}=-\frac{x}{(1+x)^2}$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\delta}(x)=-\frac{x+1-1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}=(-\psi+S)(x)$. $\hat{\delta}=-\psi+S$.

Alors $S=\psi+\hat{\delta}$. Or $\psi\in H$, $\hat{\delta}\in H$ et H est un sous-espace vectoriel. Donc $\underline{S\in H}$.

Q6 a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit q sa raison.

<u>1er cas</u> : $q\neq 0$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=q^n u_0$.

$(u_n)_{n\geq 0}\in B \iff \forall n\in\mathbb{N},\ 2q^{n+3}u_0+3q^{n+2}u_0-q^n u_0=0$ et $(u_n)_{n\geq 0}\in A$

$(u_n)_{n\geq 0}\in B \iff \forall n\in\mathbb{N},\ q^n(2q^3+3q^2-1)u_0=0$ et $(u_n)_{n\geq 0}\in A$

$$(u_n)_{n\geq 0}\in B \underset{q\neq 0}{\iff} (2q^3+3q^2-1)u_0=0 \iff \begin{cases} u_0=0 \text{ ou } 2q^3+3q^2-1=0 \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\geq 0}\in A \end{cases}$$

Notons que -1 est racine du polynôme $2X^3+3X^2-1$.

Alors $2X^3+3X^2-1=(X+1)(2X^2+X-1)=(X+1)(X+1)(2X-1)=(X+1)^2(2X-1)$

-1 est racine de $2X^2+X-1$.

Les racines de $2X^3+3X^2-1$ sont -1 et $1/2$.

$$\text{Alors } (u_n)_{n\geq 0}\in B \iff \begin{cases} u_0=0 \text{ ou } q=-1 \text{ ou } q=\frac{1}{2} \\ \text{et } (u_n)_{n\geq 0}\in A \end{cases}$$

__Remarque__.. Si $u_0=0$: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=0$ et ainsi $(u_n)_{n\geq 0}\in A$.

Si $q=-1$: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0(-1)^n=u_0\beta_n$; $(u_n)_{n\geq 0}=u_0(\beta_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}\in A$ donc $(u_n)_{n\geq 0}\in A$.

Si $q=\frac{1}{2}$: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=u_0\alpha_n$; $(u_n)_{n\geq 0}=u_0(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\alpha_n)_{n\geq 0}\in A$ donc $(u_n)_{n\geq 0}\in A$.

Ceci nous permet de dire alors que : $(u_n)_{n\geq 0}\in B \Leftrightarrow u_0=0$ ou $q=-1$ ou $q=\frac{1}{2}$.

__$2^{ème}$ cas__.. $q=0$. Si $u_0=0$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite nulle donc $(u_n)_{n\geq 0}$ appartient évidemment à B.

Supposons $u_0\neq 0$. Alors $u_1=0\times u_0=0$, $u_2=0^2\times u_0=0$ et $u_3=0^3\times u_0=0$.

Alors $2u_3+3u_2-u_0=-u_0\neq 0$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ ne peut appartenir à B.

Résumons les deux cas. $(u_n)_{n\geq 0}\in B \Leftrightarrow u_0=0$ ou $q=-1$ ou $q=\frac{1}{2}$.

Si $u_0=0$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite nulle donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison -1 ou $\frac{1}{2}$!

__Les suites géométriques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartenant à B sont les suites géométriques de raison -1 ou $\frac{1}{2}$.__

__b)__ Soit $n\in\mathbb{N}$, $2\gamma_{n+3}+3\gamma_{n+2}-\gamma_n=2(-1)^{n+3}(n+3)+3(-1)^{n+2}(n+2)-(-1)^n n=$

$(-1)^n\left[-2(n+3)+3(n+2)-n\right]=(-1)^n(-2n-6+3n+6-n)=0$.

Alors $(\gamma_n)_{n\geq 0}\in A$ (d'après Q4 c)) et $\forall n\in\mathbb{N}$, $2\gamma_{n+3}+3\gamma_{n+2}-\gamma_n=0$.

Donc __$(\gamma_n)_{n\geq 0}\in B$.__

__c)__ Montrons d'abord que B est un sous-espace vectoriel de A.

→ $B\subset A$

→ La suite nulle de A appartient évidemment à B donc B n'est pas vide.

→ Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux éléments de B.

$\lambda(a_n)_{n\geq 0}+(b_n)_{n\geq 0}=(\lambda a_n+b_n)_{n\geq 0}$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$2(\lambda a_{n+3}+b_{n+3})+3(\lambda a_{n+2}+b_{n+2})-(\lambda a_n+b_n)=\lambda(2a_{n+3}+3a_{n+2}-a_n)+(2b_{n+3}+3b_{n+2}-b_n)$.

Or $2a_{n+3}+3a_{n+2}-a_n=2b_{n+3}+3b_{n+2}-b_n=0$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont dans B

donc $2(\lambda a_{n+3}+b_{n+3})+3(\lambda a_{n+2}+b_{n+2})-(\lambda a_n+b_n)=0$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Notons également que : $\lambda(a_n)_{n\geq 0}+(b_n)_{n\geq 0}\in A$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux éléments de l'espace vectoriel A. Finalement $\lambda(a_n)_{n\geq 0}+(b_n)_{n\geq 0}\in B$.

Ceci achève de montrer que __B est un sous-espace vectoriel de A.__

Montrons alors que E est un sous-espace vectoriel de H.

- $E \subset H$ car $\underline{B \subset A}$.
- $0_A \in B$, donc $0_H \in E$!! $\underline{E \neq \emptyset}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$. Il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ de B telles que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

$\forall x \in]-1,1[$, $(\lambda f+g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$

Or $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0} = \lambda (a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} \in B$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux éléments de B et B est un espace vectoriel.

Alors $\lambda f + g \in E$.

$\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in E^2,\ \lambda f + g \in E.}$

Ceci achève de montrer que $\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } H.}$

Rappelons que nous avons posé : $\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$, $\hat{\psi}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n$ et $\hat{\delta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$

Nous avons aussi prouvé que :

1) $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ sont dans B (Q6 a et b)

2) $\varphi = \frac{1}{2}\hat{\varphi}$, $\psi = \hat{\psi}$ et $\delta = \varphi + \hat{\delta} = \hat{\varphi} + \hat{\delta}$. (Q5 b)

Alors 1) $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ et $\hat{\delta}$ sont des éléments de E et ainsi $\mathrm{Vect}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\delta}) \subset E$

2) φ, δ et ψ sont des éléments de $\mathrm{Vect}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\delta})$.

Alors $\underline{\varphi,\ \psi \text{ et } \delta \text{ sont des éléments de } E.}$

<u>Exercice</u>.. Montrer que $((\alpha_n)_{n\geq 0}, (\beta_n)_{n\geq 0}, (\gamma_n)_{n\geq 0})$ est une base de B.

En déduire que $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\delta})$ et (φ, ψ, δ) sont des bases de E.

Q7 **a)** Soit $x \in]-1,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$. En multipliant par x^{n+3} il vient :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2a_{n+3}x^{n+3} + 3x\, a_{n+2}x^{n+2} - x^3 a_n x^n = 0$

Alors $2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}x^{n+3} + 3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} - x^3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ car toutes les séries convergent.

Donc $2\sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n + 3x\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - x^3 f(x) = 0$ (deux petits changements d'indice...)

Alors $2\left(f(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2)\right) + 3x\left(f(x) - (a_0 + a_1x)\right) - x^3 f(x) = 0$.

En multipliant par -1 il vient :

$f(x)(x^3 - 3x - 2) + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2) + 3x(a_0 + a_1x) = 0$.

$f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2x^2 = 0$ et ceci pour tout $x \in]-1,1[$.

b) -1 est racine de $X^3 - 3X - 2$. $X^3 - 3X - 2 = (X+1)(X^2 - X - 2)$.

-1 est racine de $X^2 - X - 2$. $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$.

Donc les racines de $X^3 - 3X - 2$ sont -1 et 2 et elles n'appartiennent pas à $]-1,1[$.

Alors $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = -\dfrac{a_0(2+3x) + a_1(2x+3x^2) + 2a_2x^2}{x^3 - 3x - 2}$.

$\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = -\dfrac{2a_0 + (3a_0 + 2a_1)x + (3a_1 + 2a_2)x^2}{x^3 - 3x - 2}$

Posons $\varphi = -2a_0 - (3a_0 + 2a_1)X - (3a_1 + 2a_2)X^2$.

$\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^3 - 3x - 2}$.

$\exists \varphi \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^3 - 3x - 2}$.

c) Posons $Q = uX^2+vX+w$. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$f = a\varphi + b\psi + cS$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \frac{ux^2+vx+w}{x^3-3x-2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \frac{ux^2+vx+w}{x^3-3x-2} = \frac{a(1+x)^2+b(1+x)(2-x)+c(2-x)}{(2-x)(1+x)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \frac{ux^2+vx+w}{x^3-3x-2} = -\frac{(a-b)x^2+(2a+b-c)x+a+2b+2c}{x^3-3x-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in]-1,1[,\quad (u+a-b)x^2+(v+2a+b-c)x+(w+a+2b+2c)=0.$$

Ainsi si $f=a\varphi+b\psi+cS$ le polynôme $P=(u+a-b)X^2+(v+2a+b-c)X+w+a+2b+2c$ admet une infinité de racines ; c'est alors le polynôme nul et donc $\begin{cases} u+a-b=0 \\ v+2a+b-c=0 \\ w+a+2b+2c=0 \end{cases}$ (1)

Réciproquement si l'on a (1) alors $P=0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $f=a\varphi+b\psi+cS$.

Donc $f=a\varphi+b\psi+cS \Leftrightarrow \begin{cases} u+a-b=0 \\ v+2a+b-c=0 \\ w+a+2b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+u \\ c=v+2a+b=v+3a+u \\ w+a+2a+2u+2v+6a+2u=0 \end{cases}$

$$f=a\varphi+b\psi+cS \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{9}(-4u-2v-w) \\ b=\frac{1}{9}(-4u-2v-w)+u=\frac{1}{9}(5u-2v-w) \\ c=\frac{1}{3}(-4u-2v-w)+u+v=\frac{1}{3}(-u+v-w) \end{cases}.$$

Finalement : $\exists!\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ f=a\varphi+b\psi+cS.$

f est combinaison linéaire de φ, ψ et S.

d) Nous venons de montrer que $E \subset \mathrm{Vect}(\varphi, \psi, S)$.

Or φ, ψ et S sont des éléments de E donc $\mathrm{Vect}(\varphi, \psi, S)$ est contenu dans E.

Ainsi $E = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi, S)$. (φ, ψ, S) est une famille génératrice de E.

Montrons que cette famille est libre (<u>ce qui a presque été fait dans c) ou a) !!</u>

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\varphi + b\psi + cS = 0_E$.

$\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2} = 0.$

$\forall x \in]-1,1[, \quad 0 = a(1+x)^2 + b(1+x)(2-x) + c(2-x) = a+2b+2c + (2a+b-c)x + (a-b)x^2$

Ainsi $a+2b+2c+(2a+b-c)X + (a-b)X^2$ admet une infinité de racines.

C'est donc le polynôme nul. Ainsi $a+2b+2c = 2a+b-c = a-b = 0$.

$\begin{cases} b = a \\ 0 = 2a+b-c = 3a-c \\ 0 = a+2b+2c = 3a+2c \end{cases}$; $\begin{cases} b = a \\ c = 3a \\ 0 = 3a+6a \end{cases}$; $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a\varphi + b\psi + cS = 0_E \Rightarrow a=b=c=0$; (φ, ψ, S) est libre.

Finalement <u>(φ, ψ, S) est une base de E. $\dim E = 3$.</u>

Q3 a) • $(b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soit $x \in]-1,1[$. La série de terme général $|a_n x^n|$ converge car $(a_n)_{n\geq 0}$ est dans B donc dans A.

Alors la série de terme général $|a_{n+1} x^{n+1}|$ converge.

Supposons $x \neq 0$. Alors la série de terme général $\frac{1}{|x|} |a_{n+1} x^{n+1}|$ ou $|a_{n+1} x^n|$ ou $|b_n x^n|$ converge.

Si $x = 0$ il est clair que la série de terme général $|b_n x^n|$ converge.

Ainsi pour tout x dans $]-1,1[$, la série de terme général $|b_n x^n|$ converge.

Donc <u>$(b_n)_{n\geq 0} \in A$.</u>

- $\forall n \in \mathbb{N},\ 2b_{n+3}+3b_{n+2}-b_n = 2a_{n+4}+3a_{n+3}-a_{n+1} \underset{(a_n)_{n\geq 0}\in B}{=} 0$

ceci achève de montrer que $(b_n)_{n\geq 0} \in B$.

b) • Soit f un élément de E. $\exists (a_n)_{n\geq 0}\in B,\ \forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = a_{n+1}$.

$(b_n)_{n\geq 0}\in B$

$\forall x\in]-1,1[,\ u(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Ainsi $u(f)\in E$.

$\forall f\in E,\ u(f)\in E$. u est une application de E dans E.

- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(f,g)\in E^2$. $\exists (a_n)_{n\geq 0}\in B,\ \exists (\hat{a}_n)_{n\geq 0}\in B$,

$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{a}_n x^n$

Alors $\forall x\in]-1,1[,\ (\lambda f+g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n+\hat{a}_n)x^n$.

$\forall x\in]-1,1[,\ u(\lambda f+g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_{n+1}+\hat{a}_{n+1})x^n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{a}_{n+1}x^n$

toutes ces séries convergent.

$\forall x\in]-1,1[,\quad u(\lambda f+g)(x)=\lambda u(f)(x)+u(g)(x)=(\lambda u(f)+u(g))(x)$.

donc $u(\lambda f+g)=\lambda u(f)+u(g)$

$\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (f,g)\in E^2,\ u(\lambda f+g)=\lambda u(f)+u(g)$.

Finalement u est un endomorphisme de E.

c) Soit $f\in E$. $\exists (a_n)_{n\geq 0}\in B,\ \forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

Une récurrence des plus simples montre que : $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ u^k(f)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+k}x^n$

ou $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ u^k(f)(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}a_n x^{n-k}$.

Soit $x \in]-1,1[$.

$(2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x) = 2u^3(f)(x)+3u^2(f)(x)-f(x)$

$(2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(2a_{n+3}+3a_{n+2}-a_n)}_{=0 \text{ car } (a_n)_{n\geq 0}\in B} x^n = 0$

Alors $\forall x \in]-1,1[$, $(2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x)=0$.

Donc $2u^3(f)+3u^2(f)-f = 0_E$.

Alors $\forall f \in E$, $(2u^3+3u^2-Id_E)(f) = 0_E$. $2u^3+3u^2-Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\Pi = 2X^3+3X^2-1$ est un polynôme de degré 3 tel que $\Pi(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

d) • $\forall x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}x^n$.

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}x^n = \frac{1}{2}\varphi(x)$.

$u(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$.

• $\forall x \in]-1,1[$, $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = -\psi(x)$

$u(\psi) = -\psi$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\delta(x) = \psi(x) + \gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n x^n$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n + n(-1)^n\right)x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\delta)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^{n+1} + (n+1)(-1)^{n+1}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-2(-1)^n x^n - n(-1)^n x^n\right)$.

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\delta)(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n x^n$ car

toutes les séries convergent.

(Q9) a) $Sp\, u = Sp\, T = \{\frac{1}{2}, -1\}$ car T est triangulaire supérieure.

Soit $f = a\varphi + b\psi + cS$ un élément de E.

$$u(f) = \frac{1}{2} f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a \\ -b-c = \frac{1}{2}b \\ -c = \frac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Donc $SEP(u, \frac{1}{2}) = Vect(\varphi)$.

$$u(f) = -f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -a \\ -b-c = -b \\ -c = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$SEP(u, -1) = Vect(\psi)$.

b) $Sp\, u = \{\frac{1}{2}, -1\}$ et $\dim SEP(u, \frac{1}{2}) + \dim SEP(u, -1) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim E$.

Alors u n'est pas diagonalisable.

(Q10) a) D'après la troisième question du préliminaire : $SEP(u, \frac{1}{2})$ et $SEP(u, -1)$ sont stables par v.

Donc $v(\varphi) \in SEP(u, \frac{1}{2}) = Vect(\varphi)$ et $v(\psi) \in SEP(u, -1) = Vect(\psi)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $\exists \mu \in \mathbb{R},\ v(\psi) = \mu\psi$.

b) $v(S) \in E$. Donc $\exists (\varepsilon, \eta, \omega) \in \mathbb{R}^3,\ v(S) = \varepsilon\varphi + \eta\psi + \omega S$

Alors $u(v(S)) = \frac{\varepsilon}{2}\varphi - (\eta + \omega)\psi - \omega S$ $\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon/2 \\ -\eta-\omega \\ -\omega \end{pmatrix} \right)$.

$v(u(S)) = v(-\psi - S) = -v(\psi) - v(S) = -\mu\psi - v(S)$.

Alors $v(S) = -v(u(S)) - \mu\psi = -u(v(S)) - \mu\psi = -\frac{\varepsilon}{2}\varphi + (\eta + \omega)\psi + \omega S - \mu\psi$

Alors la première composante de $v(S)$ sur (φ, ψ, S) est à la fois ε et à la fois $-\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\varepsilon = 0$. $\exists (\eta, \omega) \in \mathbb{R}^2,\ v(S) = \eta\psi + \omega S$.

R.

$\forall x \in]-1,1[,\ u(\delta)(x) = -2\varphi(x) - \hat{S}(x)$. Supposons que $\hat{S} = -\psi + S$

$\forall x \in]-1,1[,\ u(\delta)(x) = -2\varphi(x) - (\delta(x) - \varphi(x)) = -\varphi(x) - \delta(x)$.

donc $\underline{u(\delta) = -\psi - \delta}$.

Alors $T = M_C(u) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 2 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 2 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & -3 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$$

Montrons alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k = \begin{pmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$

C'est vrai pour $k=0$.

Supposons l'égalité vraie pour k donné et montrons-la pour $k+1$.

$$T^{k+1} = T \times T^k = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} & -k(-1)^k - (-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

En observant que $-k(-1)^k - (-1)^k = (k+1)(-1)^{k+1}$ on obtient l'égalité pour $k+1$. Ce qui achève la récurrence.

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad T^k = \begin{pmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

c] $u \circ v = v \circ u$. Alors $M_C(u \circ v) = M_C(v \circ u)$.

$M_C(u) M_C(v) = M_C(v) M_C(u)$.

$$\begin{pmatrix} 1/c & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/c & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda/c & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\eta-\omega \\ 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/c & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\mu-\eta \\ 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$ Alors $-\eta-\omega = -\mu-\eta$. $\underline{\underline{\mu = \omega}}$.

ce qui résultait aussi de notre b] !

d] Soit v un endomorphisme de E tel qu'il existe λ, μ et η vérifiant

$M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$. Montrons que $u \circ v = v \circ u$.

Suffit de montrer que $M_C(u \circ v) = M_C(v \circ u)$ ou que $M_C(u) M_C(v) = M_C(v) M_C(u)$.

$$M_C(u) M_C(v) = \begin{pmatrix} 1/c & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/c & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\eta-\mu \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$M_C(v) M_C(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/c & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/c & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\mu-\eta \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Donc $M_C(u) M_C(v) = M_C(v) M_C(u)$. $u \circ v = v \circ u$. $v \in C(u)$.

<u>Si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ, μ et η</u>

<u>tel que $M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ alors $v \in C(u)$.</u>

e] Soient v_1, v_2, v_3 les endomorphismes de E de matrices respectives dans C :

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que (v_1, v_2, v_3) est une base de $C(u)$

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3,\ M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.
$\uparrow$ a), b), c) et d)

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3,\ M_C(v) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3,\ M_C(v) = \lambda M_C(v_1) + \mu M_C(v_2) + \eta M_C(v_3)$

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3,\ M_C(v) = M_C(\lambda v_1 + \mu v_2 + \eta v_3)$.

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \eta),\ v = \lambda v_1 + \mu v_2 + \eta v_3$. $\underline{C(u) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)}$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$0_{M_3(\mathbb{R})} = M_C(a v_1 + b v_2 + c v_3) = a M_C(v_1) + b M_C(v_2) + c M_C(v_3) = a M_1 + b M_2 + c M_3$.

$0_{M_3(\mathbb{R})} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$; alors $a = b = c = 0$.

$\underline{(v_1, v_2, v_3) \text{ est libre}}$.

Donc $\underline{\underline{(v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } C(u)}}$. $\underline{\underline{\text{dim } C(u) = 3}}$.

$\underline{f)}$ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\,Id_E + b u + c u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $M_C(a\,Id_E + b u + c u^2) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

$0_{M_3(\mathbb{R})} = a M_C(Id_E) + b M_C(u) + c M_C(u^2) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2$

$0_{M_3(\mathbb{R})} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} & 0 & 0 \\ 0 & a - b + c & -b + 2c \\ 0 & 0 & a - b + c \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Alors $\begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}=0 \\ a-b+c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$; $\begin{cases} b=2c \\ a=b-c=c \\ 0=c+\frac{2c}{2}+\frac{c}{4}=\frac{9}{4}c \end{cases}$; $\begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$.

ceci achève de montrer que (Id_E, u, u^2) est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.

9] D'après le préliminaire $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$ (Q2).

Montrons que $C(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Id_E, u, u^2 commutent avec u. Ainsi (Id_E, u, u^2) est une famille libre de $C(u)$ ~~de cardinal 3 et~~ $C(u)$ est de dimension 3.

Par conséquent (Id_E, u, u^2) est une base de $C(u)$.

Alors $C(u)=\{\alpha Id_E+\beta u+\gamma u^2 ;\ (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\}$

$C(u)=\{P(u) ;\ P\in\mathbb{R}_2[X]\}$

Donc $C(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Finalement $C(u)=\mathbb{R}[u]$.

PARTIE III Centre de L(E).

Q11 Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $e_i\neq 0_E$ donc e_i est un vecteur propre de u par hypothèse.

Alors $\exists \lambda_i\in\mathbb{R}$, $u(e_i)=\lambda_i e_i$.

$\forall i\in[\![1,n]\!], \exists \lambda_i\in\mathbb{R}, u(e_i)=\lambda_i e_i$

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. $e_i+e_j\neq 0_E$ car (e_i,e_j) est libre.

Donc e_i+e_j est un vecteur propre de u. $\exists \alpha_{i,j}\in\mathbb{R}^2$, $u(e_i+e_j)=\alpha_{i,j}(e_i+e_j)$.

Alors $\lambda_i e_i+\lambda_j e_j=u(e_i)+u(e_j)=u(e_i+e_j)=\alpha_{i,j}(e_i+e_j)$.

Donc $(\lambda_i-\alpha_{i,j})e_i+(\lambda_j-\alpha_{i,j})e_j=0_E$. Comme (e_i,e_j) est libre : $\lambda_i-\alpha_{i,j}=0$ et

$\lambda_j-\alpha_{i,j}=0$. Alors $\lambda_i=\alpha_{i,j}$ et $\lambda_j=\alpha_{i,j}$. $\lambda_i=\lambda_j$.

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j\Rightarrow \lambda_i=\lambda_j$.

Alors $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$. Posons $\lambda=\lambda_1$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $u(e_i)=\lambda e_i$. Ainsi les endomorphismes u et λId_E de E coïncident sur la base $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E. Donc ils sont égaux. $u=\lambda Id_E$.

Donc u est une homothétie vectorielle.

Q12 Soit p la projection sur F parallèlement à G.

$v\in C(U)$ et $p\in U$ donc $v\circ p=p\circ v$.

Alors $v(e)\underset{e\in F \text{ donc } p(e)=e}{=}v(p(e))=p(v(e))$. Alors $p(v(e))=v(e)$; $v(e)\in Ker(p-Id_E)$.

Or $Ker(p-Id_E)=Im\, p=F$. Alors $v(e)\in F=Vect(e)$.

Donc $\exists \alpha\in\mathbb{R}$, $v(e)=\alpha e$; e est un vecteur propre de v ($e\neq 0_E$ ...).

Ainsi tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de v donc v est une homothétie vectorielle.

Tout élément de C(U) est une homothétie vectorielle.

Réciproquement soit h une homothétie vectorielle de E. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $h = \lambda Id_E$.

$\forall w \in U$, $w \circ h = w \circ (\lambda Id_E) = \lambda w \circ Id_E = \lambda w = (\lambda Id_E) \circ w = h \circ w$.

Ainsi $h \in C(U)$.

C(U) est l'ensemble des homothéties vectorielles de E

(Q13) → Toute homothétie vectorielle de E commute avec tout endomorphisme de E.

Ainsi l'ensemble des homothéties vectorielles est contenu dans $C(\mathcal{L}(E))$.

→ Réciproquement les éléments de $C(\mathcal{L}(E))$ commutent avec tous les endomorphismes de E donc avec tous les projecteurs de E. D'après Q12 on peut alors dire que les éléments de $C(\mathcal{L}(E))$ sont des homothéties vectorielles.

Ainsi $C(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E.

PARTIE IV Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

(Q14) C'est ce qui a été prouvé dans le préliminaire question 3 !!

Pour tout élément v de $C(u)$ et pour tout élément i de $[\![1, p]\!]$, $E_i = SEP(u, \lambda_i)$ est stable par v.

(Q15) Soit v un endomorphisme de E laissant stable $E_1, E_2, \dots, E_p$.

Montrons que $v \circ u = u \circ v$.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$u(x) = u(\sum_{i=1}^{p} x_i) = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Alors $v(u(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$.

$u(v(x)) = u(v(\sum_{i=1}^{p} x_i)) = \sum_{i=1}^{p} u(v(x_i)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$; $u(v(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$

E_i est stable par v donc $v(x_i) \in E_i$ car $x_i \in E_i$

Alors $v(u(x)) = u(v(x))$

$(v \circ u)(x) = (u \circ v)(x)$ et ceci pour tout $x \in E$. Donc $v \circ u = u \circ v$, $v \in C(u)$.

R

Donc si v est un endomorphisme de E qui laisse stable $E_1, E_2, \dots, E_p$ alors $v \in C(u)$.

Remarque.. Q14 et Q15 montrent que les éléments de $C(u)$ sont les endomorphismes de E qui laissent stables les sous-espaces propres $E_1, E_2, \dots, E_p$ de u.

Q16 Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ considérons une base $\mathcal{B}_i = (e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i)$ de E_i.
$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ donc $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$" est une base de E. $r_i := \dim E_i$...

Notons que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall k \in [\![1,r_i]\!]$, $u(e_k^i) = \lambda_i e_k^i$.

$\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de u et la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale... nous y reviendrons en Q19.

* Soit v un élément de $C(u)$. $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont stables par v.
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ considérons l'endomorphisme v_i de E_i défini par :
$\forall x \in E_i$, $v_i(x) = v(x)$ et notons A_i sa matrice dans la base $\mathcal{B}_i$.

La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale par blocs égale à

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}.$$ Notons que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $A_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{R})$.

* Réciproquement, soit v un endomorphisme de E pour lequel il existe p matrices $A_1, A_2, \dots, A_p$ appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{r_1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{r_2}(\mathbb{R}), \dots, \mathcal{M}_{r_p}(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ soit la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & A_p \end{pmatrix}$

Alors pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,r_i]\!]$, $v(e_k^i)$ est combinaison linéaire de $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i$.

Donc $v(E_i) = v(\mathrm{Vect}(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i)) = \mathrm{Vect}(v(e_1^i), v(e_2^i), \dots, v(e_{r_i}^i)) \subset \mathrm{Vect}(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i) = E_i$

et ceci pour tout i dans $[\![1,p]\!]$. Donc v laisse stable $E_1, E_2, \dots, E_p$.

Par conséquent $v \in C(u)$.

Ainsi un endomorphisme v de E appartient à $C(u)$ si et seulement si il existe p matrices $A_1, A_2, \dots, A_p$ appartenant à $M_{r_1}(\mathbb{R}), M_{r_2}(\mathbb{R}), \dots, M_{r_p}(\mathbb{R})$ telles que $M_B(v)$ soit la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$.

(Q17) Soit L l'application de $C(u)$ dans $M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})$ qui à v dans $C(u)$ associe $(M_{B_1}(v_1), M_{B_2}(v_2), \dots, M_{B_p}(v_p))$ où pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ v_i est l'endomorphisme de E_i qui coïncide avec v sur E_i.

Ce qui précède montre sans difficulté que :

1) L est bien une application de $C(u)$ dans $M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})$.

2) L est surjective.

La linéarité de L ne fait aucun doute car si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $(v, w) \in (C(u))^2$: $(\lambda v + w)_i = \lambda v_i + w_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et donc $M_{B_i}((\lambda v + w)_i) = \lambda M_{B_i}(v_i) + M_{B_i}(w_i)$.

L'injectivité de L est également assez claire car deux endomorphismes ayant même matrice dans une même base sont égaux.

Alors L est un isomorphisme de $C(u)$ sur $M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})$.

Exercice. - Faire une preuve détaillée de ce résultat.

Ainsi $\dim C(u) = \dim (M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{p} \dim M_{r_i}(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$

$\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

Remarque. - Il aurait sans doute été plus rapide d'établir que

$\hat{L} : C(u) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1) \times \mathcal{L}(E_2) \times \dots \times \mathcal{L}(E_p)$, $v \longmapsto (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est un isomorphisme ... mais ce n'est pas la logique de l'énoncé.

Q18 $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i \leq r_i^2$.

Alors $n = \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ est diagonalisable}}}{\sum_{i=1}^{p} \dim E_i} = \sum_{i=1}^{p} r_i \leq \sum_{i=1}^{p} r_i^2 = \dim C(u)$; $\underline{\underline{\dim C(u) \geq n.}}$

<u>1er cas</u> u admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors 1) $p = n$

2) $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = 1$ (les sous-espaces propres de u sont nécessairement des droites vectorielles).

Ainsi $\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2 \underset{1)}{=} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \underset{2)}{=} \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$. $\dim C(u) = n$.

<u>2e cas</u>.. u n'admet pas n valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors 1) $p < n$

2) Au moins un des sous-espaces propres est de dimension strictement supérieure à 1 (dans le cas contraire $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = 1$ et alors $p = \sum_{i=1}^{p} r_i = n$!)

donc $\exists i_0 \in [\![1,p]\!]$, $r_{i_0} > 1$. Ainsi $r_{i_0}^2 > r_{i_0}$.

Alors $\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2 = r_{i_0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} r_i^2 \geq r_{i_0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} r_i > r_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} r_i = \sum_{i=1}^{p} r_i = n$.

Finalement $\dim C(u) > n$.

Pour conclure $\underline{\underline{\dim C(u) = n \text{ si et seulement si } u \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}}$.

Q19 Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres, dans l'ordre, associées aux n vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$.

$\underline{M = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$.

Une récurrence simple donne $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)}$.

Alors $\underline{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(M) = \mathrm{Diag}(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n))}$.

(Q20) Reprenons les notations de Q19.

$M = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Alors $\Pi(M) = \mathrm{Diag}(\Pi(\alpha_1), \Pi(\alpha_2), \dots, \Pi(\alpha_n))$.

Or $\mathrm{Sp}\, u = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Comme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les zéros de Π : $\forall i \in [\![1,p]\!], \Pi(\lambda_i) = 0$ et

donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \Pi(\alpha_i) = 0$.

Alors $\Pi(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $\underline{\Pi(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

(Q21) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Supposons que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors le spectre de u est contenu dans l'ensemble des zéros de P.
  Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p zéros distincts de P. $\forall i \in [\![1,p]\!], P(\lambda_i) = 0$.
- Supposons que $\forall i \in [\![1,p]\!], P(\lambda_i) = 0$.
  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ étant deux à deux distincts, $\Pi = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ divise P.

Donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = Q\Pi$.

Alors $P(u) = Q(u) \circ \Pi(u) = Q(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\underline{\forall P \in \mathbb{R}[X], \; P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], P(\lambda_i) = 0}$. Remarque .. On pouvait aller plus vite avec Q19...

(Q22) Soit $(t_0, t_1, \dots, t_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} t_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{p-1} t_k X^k$. Notons que $\deg P \leq p-1$.

Alors $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p zéros distincts de P.

Comme $\deg P \leq p-1$: P est le polynôme nul. Alors $t_0 = t_1 = \dots = t_{p-1} = 0$.

Ceci achève de montrer que $\underline{(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1}) \text{ est une famille libre}}$.

(Q23) Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

Supposons $k \geqslant p$. Effectuons la division euclidienne de X^k par Π.

$\exists (\hat{Q}, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $X^k = \hat{Q}\,\Pi + R$ avec $\deg R < \deg \Pi = p$.

Alors $u^k = \hat{Q}(u) \circ \Pi(u) + R(u) = \hat{Q}(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} + R(u) = R(u)$.

$\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $R = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i X^i$ car $R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Alors $u^k = R(u) = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i u^i$ donc $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})}$.

* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists d \in \mathbb{N}$, $\exists (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $P = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k X^k$.

$P(u) = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k u^k$ et $\forall k \in [\![0, d]\!]$, $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

Donc $P(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$. Donc $\underline{\mathbb{R}[u] \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})}$.

* Réciproquement soit $v \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$

$\exists (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $v = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k u^k$. Posons $P = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k X^k$.

Alors $v = P(u)$. Donc $v \in \mathbb{R}[u]$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1}) \subset \mathbb{R}[u]}$

Finalement $\underline{\mathbb{R}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})}$

Comme la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre c'est une base de $\mathbb{R}[u]$. Ainsi $\underline{\dim \mathbb{R}[u] = p}$.

(Q24) * Supposons que u admette n valeurs propres distinctes.

Alors $p = n$. On a alors $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$ d'après Q3 et

$\dim \mathbb{R}[u] = p = n = \dim C(u)$ d'après Q18 et Q23.

Donc $\underline{\mathbb{R}[u] = C(u)}$.

* Supposons que $\mathbb{R}[u] = C(u)$.

Alors $\dim \mathbb{R}[u] = \dim C(u)$.

Or $\dim \mathbb{R}[u] = p$ et $\dim C(u) \geq n$. Donc $p \geq n$.

Comme p est le nombre de valeurs propres de u et que $\dim E = n$: $p \leq n$.

Finalement $p = n$. u admet n valeurs propres distinctes.

Ainsi : $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

PARTIE V Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Q25 Soit $w \in C_2(u)$. w commute avec tous les éléments de $C(u)$.

Or u commute avec u donc $u \in C(u)$

Donc w commute avec u et ainsi $w \in C(u)$.

$\forall w \in C_2(u)$, $w \in C(u)$. $C_2(u) \subset C(u)$.

Q26 Soit $v \in C(u)$. $v \circ u = u \circ v$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, v \circ u^k = u^k \circ v$

- C'est vrai pour $k=0$ car $u^0 = Id_E$
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$v \circ u^{k+1} = (v \circ u^k) \circ u \overset{\mathcal{H}}{=} (u^k \circ v) \circ u = u^k \circ (v \circ u) \underset{v \circ u = u \circ v}{=} u^k \circ (u \circ v) = u^{k+1} \circ v$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}, v \circ u^k = u^k \circ v$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}, \exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

$v \circ P(u) = v \circ \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, v \circ u^k = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k \circ v = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) \circ v = P(u) \circ v$

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) \circ v = v \circ P(u)$ et ceci pour tout v dans $C(u)$.

Alors $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $P(u)\in C(C(u))$. Donc $\mathbb{R}[u]\subset C_2(u)$.

(Q27) 1er cas.. $p=1$. Alors $E=E_1=\ker(u-\lambda_1 Id_E)$. Donc $u=\lambda_1 Id_E$.

Ainsi $C(u)=\mathcal{L}(E)$. Donc $C_2(u)=C(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E.

Soit $v\in C_2(u)$. $v_1=v\in C(\mathcal{L}(E))$ car $C_2(u)=C(\mathcal{L}(E))$. $v_1\in C(\mathcal{L}(E_1))$ car $C(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E et de E_1.

$\exists \mu_1\in\mathbb{R}$, $v_1=\mu_1 Id_{E_1}$.

2e cas.. $p\geq 2$. $E=E_i\oplus E'_i$ où $E'_i=\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} E_j$ et ceci pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ notons p_i la projection sur E_i parallèlement à E'_i.

Soit $v\in C_2(u)$. Soit $i\in[\![1,p]\!]$. v commute avec tous les éléments de $C(u)$.

Montrons que v_i commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E_i)$.

Soit $w_i\in\mathcal{L}(E_i)$. Posons $\forall x\in E$, $w(x)=w_i(p_i(x))$ (notons que w n'est pas $w_i\circ p_i$ ...). w est clairement un endomorphisme de E.

Montrons que $w\in C(u)$. Soit $x\in E$. $\exists!(x_1,x_2,\dots,x_p)\in E_1\times E_2\times\dots\times E_p$

$x=x_1+x_2+\dots+x_p$.

$$w(u(x))=w\left(\sum_{\ell=1}^{p}u(x_\ell)\right)\overset{\forall \ell\in[\![1,p]\!],\ x_\ell\in E_\ell}{=}w\left(\sum_{\ell=1}^{p}\lambda_\ell x_\ell\right)=\sum_{\ell=1}^{p}\lambda_\ell w(x_\ell)=\sum_{\ell=1}^{p}\lambda_\ell w_i(p_i(x_\ell))$$

or $\forall \ell\in[\![1,p]\!]$, $p_i(x_\ell)=\begin{cases}x_i & \text{si } \ell=i\\ 0_E & \text{si } \ell\neq i\end{cases}$. Donc $w(u(x))=\lambda_i w_i(x_i)$.

$$u(w(x))=u\left(w\left(\sum_{\ell=1}^{p}x_\ell\right)\right)=u\left(\sum_{\ell=1}^{p}w(x_\ell)\right)=u\left(\sum_{\ell=1}^{p}w_i(p_i(x_\ell))\right)=u(w_i(x_i)).$$

Or $w_i\in\mathcal{L}(E_i)$ donc $w_i(x_i)\in E_i$. Alors $u(w(x))=\lambda_i w_i(x_i)$.

$\forall x \in E$, $\omega(u(x)) = u(\omega(x))$; $\omega \circ u = u \circ \omega$, $\omega \in C(u)$.

Q_2 $v \in C(u)$ donc $v \circ \omega = \omega \circ v$.

Alors $\forall x \in E$, $v(\omega(x)) = \omega(v(x))$.

donc $\forall x \in E_i$, $v(\omega(x)) = \omega(v(x))$. Soit $x \in E_i$.

• $\omega(x) = \omega_i(p_i(x)) = \omega_i(x)$; $\omega(x) \in E_i$.

Alors $v(\omega(x)) = v_i(\omega(x)) = v_i(\omega_i(x))$. $v_i(x) \in E_i$

• $x \in E_i$ donc $v(x) = v_i(x)$. $\omega(v(x)) = \omega(v_i(x)) = \omega_i(p_i(v_i(x))) = \omega_i(v_i(x))$.

Ainsi $v_i(\omega_i(x)) = v(\omega(x)) = \omega(v(x)) = \omega_i(v_i(x))$ et ceci pour tout x dans E_i

Donc $v_i \circ \omega_i = \omega_i \circ v_i$ et ceci pour tout $\omega_i \in \mathcal{L}(E_i)$.

Alors $v_i \in C(\mathcal{L}(E_i))$. D'après Q13 $C(\mathcal{L}(E_i))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E_i. Donc $\exists \mu_i \in \mathbb{R}$, $v_i = \mu_i \, Id_{E_i}$.

(Q12) Posons $\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $S(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p))$.

S est une application de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^p$ clairement linéaire.

montrons que S est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^p$.

comme $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = p = \dim \mathbb{R}^p (\neq 0)$ il ne reste plus qu'à montrer que S est injective.

soit $P \in \operatorname{Ker} S$. $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)) = 0_{\mathbb{R}^p}$.

$P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \dots = P(\lambda_p) = 0$.

donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et admet au moins p racines distinctes.

Alors P est le polynôme nul. ceci achève de montrer que S est injective et que S est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^p$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$\forall i \in [\![1,p]\!],\ P(\lambda_i)=\rho_i \Leftrightarrow S(P)=(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_p) \Leftrightarrow P = S^{-1}((\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_p))$.

Ainsi il existe un unique élément φ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \varphi(\lambda_i)=\rho_i$.

($\varphi = S^{-1}((\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_p))$).

Q29 Reprenons v dans $C_2(u)$ et toutes les notations de Q28.

Montrons que $v \in \mathbb{R}[u]$.

$\forall i\in[\![1,p]\!],\ \exists \rho_i \in \mathbb{R},\ v_i = \rho_i \mathrm{Id}_{E_i}$ et $\exists \varphi\in\mathbb{R}_{p-1}[X],\ \forall i \in[\![1,p]\!],\ \varphi(\lambda_i)=\rho_i$.

Montrons que $v=\varphi(u)$. Soit $x\in E$. $\exists!(x_1,x_2,\dots,x_p)\in E_1\times E_2\times\dots\times E_p$,

$x=\sum_{i=1}^{p} x_i$.

$u(x_i)=\lambda_i x_i$ donc $\varphi(u)(x_i)=\varphi(\lambda_i)x_i$.

$$v(x)=\sum_{i=1}^{p} v(x_i) = \sum_{i=1}^{p} v_i(x_i) = \sum_{i=1}^{p}\rho_i x_i = \sum_{i=1}^{p}\varphi(\lambda_i)x_i \overset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{p}(\varphi(u))(x_i).$$

$v(x)=\varphi(u)\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = \varphi(u)(x)$.

Ainsi $\forall x\in E,\ v(x)=\varphi(u)(x)$; $v=\varphi(u)$ et ainsi $v\in\mathbb{R}[u]$.

Donc $\forall v\in C_2(u),\ v\in\mathbb{R}[u]$. $C_2(u)\subset\mathbb{R}[u]$.

Or Q26 a montré que $\mathbb{R}[u]\subset C_2(u)$.

Par conséquent $C_2(u)=\mathbb{R}[u]$ et même $C_2(u)=\mathbb{R}_{p-1}[u]$.