



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

CODE ÉPREUVE :

283

CCIP_M2_S

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n , ($n \geq 1$), à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ' .

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.

Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω .

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de X_0 .

b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre 1/2.

On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0} , F_{Y_1} et F_Y , les fonctions de répartition de Y_0 , Y_1 et Y , respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1 .

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{4} + \sqrt{t} \right) \right]$, où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ .

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \right) \right]$.

d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II. Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P , la suite $(R_i)_{i \geq 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P, R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1} . Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geq 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m , ($m \geq 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i \geq 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1 R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2 R_2 - R_3 \\ \vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1} R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_m R_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier j de $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c) Soit j un entier de $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j , alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ une t -liste ($t \geq 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p -liste ($p \leq t$) $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_p)$. On appelle *nombre de changements de signe de s* , le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \widehat{s_i s_{i+1}} < 0\}$. Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.

Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\hat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x , on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m -liste $(R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$ -liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$. On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P .

- a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0 , montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.
- b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \dots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[1, m-1]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).
- c) Dédire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit α une racine (réelle ou complexe) de P . Montrer que si $|\alpha| \geq 1$, alors $|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En

dédire, pour toute racine α de P , l'inégalité : $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P .

5. On définit en Pascal

`const n = ... ;`

`Type tab = array[1..n] of real ;`

`Var T : tab ;`

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels $(T[1], T[2], \dots, T[n])$.

On tiendra compte du fait que le tableau T peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau T et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \dots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note V^* le polynôme réciproque du polynôme V , défini par : $V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \dots + v_{m-1} X + v_m$. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n , normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = X P'(X)$.

On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^*)$.

3. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$Q_k(x) = 1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}. \text{ Montrer que } (T^k(P))^* = n^k Q_k.$$

4. a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1 - y)e^y \leq 1$.

b) On **admet** la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \rho\}$. Soit U un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ , $|U(z)| \leq \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\frac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\frac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

- c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \frac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.
- i) Étudier les variations de ψ .
 - ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$.
 - iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}$.
- d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln \left(\frac{L(P)}{|a_0|} \right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ , strictement positif.

Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \dots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω . On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n .

2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω , on a :

$$M_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

3. Soit h une fonction de classe C^2 , concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

- a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.
- b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leq h(E(W))$.

4. a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

- b) Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \frac{a^k}{k!}$ est convergente.

5. a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

- b) Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

* FIN *