



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

CODE ÉPREUVE :

283

CCIP_M2_S

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n , ($n \geq 1$), à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ' .

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.

Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω .

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$). On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de X_0 .

b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $1/2$. On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0} , F_{Y_1} et F_Y , les fonctions de répartition de Y_0 , Y_1 et Y , respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1 .

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{4} + \sqrt{t} \right) \right]$, où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ .

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \right) \right]$.

d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II. Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P , la suite $(R_i)_{i \geq 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P$, $R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1} . Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geq 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m , ($m \geq 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i \geq 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1 R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2 R_2 - R_3 \\ \vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1} R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_m R_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier j de $[0, m-1]$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c) Soit j un entier de $[1, m-1]$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j , alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ une t -liste ($t \geq 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p -liste ($p \leq t$) $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_p)$. On appelle nombre de changements de signe de s , le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in [1, p-1] \mid \hat{s}_i \hat{s}_{i+1} < 0\}$. Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.

Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\hat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x , on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m -liste $(R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$ -liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$. On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P .

- a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0 , montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.
- b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \dots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[1, m-1]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).
- c) Dédurre des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit α une racine (réelle ou complexe) de P . Montrer que si $|\alpha| \geq 1$, alors $|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En déduire, pour toute racine α de P , l'inégalité : $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P .

5. On définit en Pascal

```
const n = ... ;
Type tab = array[1..n] of real ;
Var T : tab ;
```

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Fonction nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels $(T[1], T[2], \dots, T[n])$.

On tiendra compte du fait que le tableau T peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau T et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \dots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note V^* le polynôme réciproque du polynôme V , défini par : $V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \dots + v_{m-1} X + v_m$. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n , normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = X P'(X)$.

On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$.
- b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^*)$.

3. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$Q_k(x) = 1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$. Montrer que $(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1 - y)e^y \leq 1$.

b) On admet la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \rho\}$. Soit U un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ , $|U(z)| \leq \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\frac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\frac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

- c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \frac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.
- Étudier les variations de ψ .
 - Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$.
 - En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}$.
- d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln \left(\frac{L(P)}{|a_0|} \right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ , strictement positif.

Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \dots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω . On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n .

- À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω , on a :

$$M_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

- Soit h une fonction de classe C^2 , concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

- Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.
- En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leq h(E(W))$.

- a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \frac{a^k}{k!}$ est convergente.

- a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

- Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

* FIN *

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires.

Q1) π est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\pi(\mathbb{R}) \subset \{0, 1, 2\}$.

Pour montrer que π est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ il suffit de montrer que $\pi^{-1}(\{0\})$, $\pi^{-1}(\{1\})$ et $\pi^{-1}(\{2\})$ sont des éléments de $\mathcal{B}$.

$$\text{Posons } \Delta = X_1^2 - 4X_0.$$

X_1 et X_0 sont deux variables aléatoires sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ donc il en est de même pour X_1^2 et $-4X_0$.

Δ est alors une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ comme somme de deux variables aléatoires sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$.

Ainsi $\Delta^{-1}((-\infty, 0])$, $\Delta^{-1}(\{0\})$ et $\Delta^{-1}([0, +\infty[)$ sont des éléments de $\mathcal{B}$.

Or $\pi^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \mathbb{R} \mid \Delta(\omega) < 0\} = \Delta^{-1}((-\infty, 0])$, de même $\pi^{-1}(\{1\}) = \Delta^{-1}(\{0\})$ et

$\pi^{-1}(\{2\}) = \Delta^{-1}([0, +\infty[)$. Nous $\pi^{-1}(\{0\})$, $\pi^{-1}(\{1\})$ et $\pi^{-1}(\{2\})$ sont des éléments de $\mathcal{B}$.

Ceci achève de montrer que π est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$.

Q2) a) $X_0(\Omega) = \{-1, 1\}$. $P(X_0 = -1) = P(2Z - 1 = -1) = P(Z = 0) = 1 - p$.

$$P(X_0 = 1) = P(2Z - 1 = 1) = P(Z = 1) = p.$$

$$\underline{X_0(\Omega) = \{-1, 1\}}. \quad P(X_0 = 1) = p \text{ et } P(X_0 = -1) = 1 - p.$$

b) $\Delta = X_1^2 - 4X_0 = 1 - 4X_0$. Si X_0 prend la valeur 1, Δ prend la valeur -3 et π prend la valeur 0. Si X_0 prend la valeur -1, Δ prend la valeur 5 et π prend la valeur 2.

$$\pi(\Omega) = \{0, 2\}. \quad P(\pi = 0) = P(X_0 = 1) = p \text{ et } P(\pi = 2) = P(X_0 = -1) = 1 - p.$$

$$E(\pi) = 2P(\pi = 2) = 2P(X_0 = -1) = 2(1 - p).$$

$$\underline{\pi(\Omega) = \{0, 2\}}. \quad P(\pi = 0) = p \text{ et } P(\pi = 2) = 1 - p. \quad E(\pi) = 2(1 - p).$$

Q3) Notons F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\lambda} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

• $Y_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[, F_{Y_1}(x) = 0$

$\forall x \in [0, +\infty[, F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\sqrt{x}/\lambda}$

$\forall x \in [0, +\infty[, F_{Y_1}(x) = F(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\sqrt{x}/\lambda}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/\lambda} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/\lambda} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On remarque que $\forall x \in]-\infty, 0[, F_{Y_1}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, F_{Y_1}(x) = 1 - e^{-\sqrt{x}/\lambda}$.

Rappelons que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de donc B' sur $[0, +\infty[$.

Alors F_{Y_1} est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, et de donc B' sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de donc B' au moins sur $\mathbb{R}^0$.

Ainsi Y_1 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[, F'_{Y_1}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, F'_{Y_1}(x) = \frac{1}{4\lambda} e^{-\sqrt{x}/\lambda}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\lambda} e^{-\sqrt{x}/\lambda} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_1 est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_1} sur $\mathbb{R}^0$.

Ainsi f_1 est une densité de Y_1 .

- $Y_0(x) =]-\infty, 0]$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Y_0}(x) = 1$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_0}(x) = P(Y_0 \leq x) = P(-\sqrt{X_0} \leq x) = P(X_0 \geq -\frac{x^2}{4}) = 1 - P(X_0 < -\frac{x^2}{4})$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_0}(x) = 1 - P(X_0 \leq -\frac{x^2}{4}) = 1 - (1 - e^{-(x^2/4)/2}) = e^{x^2/8}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_0}(x) = \begin{cases} e^{x^2/8} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Notons que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{Y_0}(x) = e^{x^2/8}$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Y_0}(x) = 1$.

F_{Y_0} est donc de classe $\mathcal{B}'$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Cela suffit pour dire que F_{Y_0} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}'$ au moins sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi Y_0 est une variable aléatoire à densité'.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_{Y_0}(x) = \frac{1}{8} e^{x^2/8}$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_{Y_0}(x) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{x^2/8} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_0 est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_0} sur $\mathbb{R}^*$ donc f_0 est une densité de Y_0 .

(Q4) a) $t \mapsto -\frac{1}{2}(\frac{t}{4} + \sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi

$t \mapsto e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{4} + \sqrt{t})}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le produit est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

- $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq g(t) \leq t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{8}} = 8^{1/2} \Gamma(1/2) \frac{t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{8}}}{8^{1/2} \Gamma(1/2)}$.

$t^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{4} + \sqrt{t})} \leq -\frac{1}{2} \frac{t}{4}$

• de cours nous apprend que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t\theta}}{\Gamma(n)} dt$ converge et vaut 1

(loi gamma de paramètres θ et n).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives et les deux points précédents donnent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

$\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

b) X_1 est une variable aléatoire de densité f_1 bornée.
 X_0 est une variable aléatoire de densité f_0 (bornée).
 X_1 et X_0 sont indépendantes.

Alors 1° $Y = X_1 + X_0$ est une variable aléatoire à densité.

2° $f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-t) f_{X_0}(t) dt$ en est une densité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}|x|} f_{X_0}(x-t) dt$

1^{er} cas... $x \in]-\infty, 0[$. Alors $\forall t \in [0, +\infty[$, $x-t < 0$

$$\text{Ainsi } f_Y(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}|x|} \frac{1}{8} e^{-\frac{x-t}{8}} dt = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{t}{8})} dt$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

2nd cas... $x \in [0, +\infty[$. Si $t \in [x, +\infty[$, $x-t \leq 0$ et si $t \in]x, +\infty[$, $x-t > 0$.

$$\text{Alors } f_Y(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}|x|} \frac{1}{8} e^{-\frac{x-t}{8}} dt + \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt.$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}}}$$

f_Y est une densité de Y .

Q5) Pour $\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$.

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{4} + \sqrt{t})} dt = \int_0^{+\infty} \varphi'(t) 2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{\varphi(t)^4}{4} + t)} dt.$$

Pour $\forall u \in]0, +\infty[$, $h(u) = 2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^4}{4} + u)}$

h est continue sur $]0, +\infty[$.

$\int_0^{+\infty} \varphi'(t) h(\varphi(t)) dt$ converge.

φ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, +\infty[$, φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = +\infty$.

Ainsi φ est de classe $\mathcal{B}'$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} \varphi'(t) h(\varphi(t)) dt$ et $\int_0^{+\infty} h(u) du$ ont de même nature et sont égaux en cas de convergence.

Le $\int_0^{+\infty} \varphi'(t) h(\varphi(t)) dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} h(u) du$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} \varphi'(t) h(\varphi(t)) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt$.

Alors $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} 2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^4}{4} + u)} du$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est légitime.

$$b) \int_0^{+\infty} g(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^4}{4} + u)} du = 2e^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^4}{4} + u + 1)} du$$

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = 2e^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{2} + 1)^2} dv$$

$u \rightarrow \frac{u}{2} + 1$ définit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ de classe $\mathcal{B}'$. Ceci légitime le changement de variable $v = \frac{u}{2} + 1$ dans la dernière intégrale.

$$\text{Alors } \int_0^{+\infty} g(u) dt = 2\sqrt{e} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2} du = 2\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv$$

$$\int_0^{+\infty} g(u) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv.$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f_\gamma(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(u) dt \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, f_\gamma(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(u) dt$$

$$\text{avec } \forall x \in]-\infty, 0[\text{, } f_\gamma(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(u) dt = \frac{1}{32} e^{x/8} 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f_\gamma(x) = \frac{1}{8} e^{x/8} \sqrt{e} \sqrt{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u^2/2} du$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f_\gamma(x) = \frac{\sqrt{e\pi}}{8} e^{x/8} \int_1^{+\infty} \varphi(v) dv = \frac{\sqrt{e\pi}}{8} e^{x/8} (1 - \int_{-\infty}^1 \varphi(v) dv)$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f_\gamma(x) = \frac{\sqrt{e\pi}}{8} e^{x/8} (1 - \Phi(1)).$$

c) soit $x \in [0, +\infty[$. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (que l'on réalise de la même manière que pour b)) permet d'écrire :

$$\int_x^{+\infty} g(u) dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{2}+\sqrt{t})} dt = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{2}+u)} du = 2\sqrt{e} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2} du.$$

Un second changement de variable $v = \frac{u}{2} + 1$ donne alors :

$$\int_x^{+\infty} g(u) dt = 2\sqrt{e} \int_{\frac{\sqrt{x}}{2}+1}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} 2 dv = 4\sqrt{e\pi} \int_{\frac{\sqrt{x}}{2}+1}^{+\infty} \varphi(v) dv = 4\sqrt{e\pi} (1 - \Phi(\frac{\sqrt{x}}{2}+1))$$

$$\text{Alors } f_\gamma(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(u) dt = \frac{\sqrt{e\pi}}{8} e^{x/8} [1 - \Phi(\frac{\sqrt{x}}{2}+1)]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2} + 1\right) \right].$$

d) $\pi(x) = \{0, 1, 2\}$. $Y = X_1^2 - 4X_0$.

• $P(\pi=1) = P(Y=0) = 0$ car Y est une variable aléatoire à densité.

• $P(\pi=0) = P(Y < 0) = \int_{-\infty}^0 f_Y(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} (1 - \Phi(1)) \int_{-\infty}^0 e^{x/8} dx$.

$P(\pi=0) = \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1)) \int_{-\infty}^0 f_0(x) dx = \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$ car $\int_{-\infty}^0 f_0(x) dx = 1$.

• Alors $P(\pi=2) = 1 - 0 - \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$.

Ainsi $P(\pi=0) = \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$, $P(\pi=1) = 0$ et $P(\pi=2) = 1 - \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1))$

$E(\pi) = 0 P(\pi=0) + 1 P(\pi=1) + 2 P(\pi=2) = 2 P(\pi=2)$.

$E(\pi) = 2 (1 - \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1)))$.

Remarque... $P(\pi=0) \approx 0,6559$. $P(\pi=2) \approx 0,3441$.

Une version 2 de
II QS bj mise ici
pour économiser une
feuille.

```
Function nbchgs(n:integer;T:tab):integer;
var j,c,k:integer;d:boolean;
begin
  j:=0;c:=0;
  repeat
    j:=j+1;
  until (T[j]<>0) or (j=n);

  if j<n then begin
    d:=(T[j]>0);
    for k:=j+1 to n do
      if d=(T[k]<0) then begin
        c:=c+1;d:=(T[k]>0);
      end;
    end;

    nbchgs:=c;
  end;
```

PARTIE II

(Q1) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\forall k \in \mathbb{N}, R_k \neq 0$.
 $R_0 = P \neq 0$ et $R_1 = -P' \neq 0$ car $\deg P \geq 1$. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, R_k \neq 0$.
 Soit $j \in \mathbb{N}$. $R_{j+1} \neq 0$ donc $-R_{j+2}$ est le reste dans la division de R_j par R_{j+1} ;
 ainsi $\deg(R_{j+2}) = \deg R_{j+2} < \deg R_{j+1}$ ou $\deg R_{j+2} + 1 \leq \deg R_{j+1}$.
 $\forall j \in \mathbb{N}, \deg R_{j+2} + 1 \leq \deg R_{j+1}$ ou $\forall j \in \mathbb{N}^*, \deg R_{j+1} + 1 \leq \deg R_j$.
 Cette inégalité vaut aussi pour $j=0$ car $\deg R_1 + 1 = \deg(-P') + 1 = n+1 = n = \deg R_0$.
 Finalement $\forall j \in \mathbb{N}, 1 \leq \deg R_j - \deg R_{j+1}$. $R_{n+1} \neq 0$
 $\forall r \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^r 1 \leq \sum_{j=0}^r (\deg R_j - \deg R_{j+1}) = \deg R_0 - \deg R_{r+1} \leq \deg R_0 = n$
 Mais $\forall r \in \mathbb{N}, r \leq n$! En particulier $n+1 \leq n$!!
 Ainsi $\exists k \in \mathbb{N}, R_k = 0$.

Conséquence... $\{ k \in \mathbb{N} \mid R_k = 0 \}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Cette partie possède un plus petit élément m' . $m' \geq 2$.

Pour $m = m'-1$. Alors $m \geq 1$ et $R_m \neq 0$.

$R_{m+1} = R_{m'} = 0$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, R_k = 0$ (récurse à gauche).

Notons encore que $R_0 \neq 0, R_1 \neq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, R_k \neq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, R_k \neq 0$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, R_k \neq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, R_k = 0$.

(Q2) a) Soit j un élément de $\mathbb{N}$ et soit x_0 un réel tel que :

$$R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0.$$

Notons à l'aide d'une récurrence descendante que $\forall k \in \mathbb{N}, R_k(x_0) = R_{k+1}(x_0)$.

→ la propriété est vraie pour $k=j$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $k-1$.

$0 \leq k-1 < j$ donc $R_{k-1} = R_k S_k - R_{k+1}$. A par hypothèse de récurrence

$R_k(x_0) = R_{k+1}(x_0) = 0$. Ainsi $R_{k-1}(x_0) = R_k(x_0) S_k(x_0) - R_{k+1}(x_0) = 0$. Alors $R_{k-1}(x_0) = R_k(x_0) = 0$

et la récurrence s'achève.

la propriété est particulière vraie pour $l=0$. Ainsi $R_1(x_0) = R_0(x_0) = 0$.

Alors $P'(x_0) = R(x_0) = 0$ car $R_0 = P$ et $R_1 = -P'$.

Remarque... Notons que ceci est impossible car toutes les racines réelles de P sont simples.

Pour conséquent il n'existe pas d'élément j appartenant à $[0, n-1]$ et de réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$.

b) Supposons que R_n possède une racine réelle x_0 .

$$R_{n-1}(x_0) = S_n(x_0) R_n(x_0) = 0.$$

Alors $n-1 \in [0, n-1]$ et $R_{n-1}(x_0) = R_{(n-1)+1}(x_0) = 0$. Ainsi $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

Mais x_0 est une racine réelle de P d'au plus au moins deux :

R_n n'a pas de racine réelle.

c) Soit $j \in [0, n-1]$. Supposons que x_0 est une racine réelle de R_j .

$$R_{j-1}(x_0) = S_j(x_0) R_j(x_0) - R_{j+1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0).$$

De plus $R_{j+1}(x_0) \neq 0$ car $R_{j+1}(x_0) = 0$ donne $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0)$ avec $j \in [0, n-1]$ ce qui est impossible comme nous l'avons vu à la fin de a)

Ainsi $R_{j-1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0)$ et $R_{j+1}(x_0) \neq 0$ donc $R_{j-1}(x_0) R_{j+1}(x_0) < 0$.

Si $j \in [0, n-1]$ et si x_0 est un zéro de R_j alors $R_{j-1}(x_0) R_{j+1}(x_0) < 0$.

(Q3) a) $x_0 \in \mathbb{R}$ et $P(x_0) = 0$. Ainsi $P'(x_0) \neq 0$ car les racines réelles de P sont simples. ou changer P en $-P$...

Supposons par exemple que $P'(x_0) > 0$ (nous admettrons si $P'(x_0) < 0$)

P est croissant en x_0 donc : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |P'(x) - P'(x_0)| < \varepsilon$

En particulier $\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \beta \Rightarrow |P'(x) - P'(x_0)| < \frac{P'(x_0)}{2}$

$$\forall x \in]x_0 - s_1, x_0 + s_1[, \quad -\frac{P'(x_0)}{2} < P'(x) - P'(x_0) < \frac{P'(x_0)}{2}.$$

$$\forall x \in]x_0 - s_1, x_0 + s_1[, \quad 0 < \frac{P'(x_0)}{2} = P'(x_0) - \frac{P'(x_0)}{2} < P'(x).$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]x_0 - s_1, x_0 + s_1[, \quad 0 < P'(x).$$

$$\text{Soit } h \in]0, s_1[. \quad [x_0 - h, x_0 + h] \subset]x_0 - s_1, x_0 + s_1[.$$

Pour $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $P'(x) > 0$. P est donc strictement croissante sur

$$[x_0 - h, x_0 + h] \text{ et } P(x_0) = 0. \text{ Alors } P(x_0 - h) < 0 \text{ et } P(x_0 + h) > 0.$$

$$\text{De plus } P'(x_0 + h) > 0 \text{ et } P'(x_0 - h) > 0.$$

$$\text{Ainsi } P(x_0 + h) P'(x_0 + h) > 0 \text{ et } P(x_0 - h) P'(x_0 - h) < 0.$$

$$\text{Alors } R_0(x_0 + h) R_1(x_0 + h) < 0 \text{ et } R_0(x_0 - h) R_1(x_0 - h) > 0 \text{ car } R_0 = P \text{ et } R_1 = -P'.$$

$$\text{Donc } C_1(x_0 + h) = 1 \text{ et } C_1(x_0 - h) = 0. \text{ Alors } C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1.$$

$$\text{Soit un élément de } \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1 \text{ pour tout } h \in]0, s_1[.$$

$$\exists s_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in]0, s_1[, \quad C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1.$$

b) un petit appel.. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } f \text{ est continue en } a \text{ et si } f(a) > 0 : \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[, \quad f(x) > 0.$$

$$\text{Si } f \text{ est continue en } a \text{ et si } f(a) < 0 : \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[, \quad f(x) < 0.$$

La démonstration de ce résultat est analogue à celle que nous avons vu de

$$\text{montrer dans a) que si } P'(x_0) > 0 \quad \exists s_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]x_0 - s_1, x_0 + s_1[, \quad P'(x) > 0$$

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ Cas... } m = 1.$$

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $C_2(x)$ est le nombre de changements de signe dans la 1. liste $(R_1(x))$. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_2(x) = 0$.

$$\text{Si } s_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in]0, s_1[, \quad C_2(x_0 + h) = 0 = C_2(x_0 - h).$$

$$\text{Ainsi } \exists s_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in]0, s_1[, \quad C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h),$$

2^{ème} Cas... $n \geq 2$

$$a) \forall j \in [1, m-1], R_j(u_0) \neq 0$$

$$\text{si ce n'est } \forall j \in [1, m], R_j(u_0) \neq 0 \text{ car } R_m(u_0) \neq 0.$$

$$\text{Alors } \forall j \in [1, m-1], R_j(x_0) R_{j+1}(x_0) \neq 0.$$

$$\text{Soit } j \in [1, m-1], \exists \eta_j \in \mathbb{R}_+^*, (\forall x \in]x_0 - \eta_j, x_0 + \eta_j[, R_j(x) R_{j+1}(x) > 0) \text{ ou}$$

$$(\forall x \in]x_0 - \eta_j, x_0 + \eta_j[, R_j(x) R_{j+1}(x) < 0).$$

$$\text{Posons } S_2 = \inf(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}). \quad S_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et pour tout } j \in [1, m-1] :$$

$$\text{ou } (\forall x \in]x_0 - S_2, x_0 + S_2[, R_j(x) R_{j+1}(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in]x_0 - S_2, x_0 + S_2[, R_j(x) R_{j+1}(x) < 0)$$

$$\text{Ainsi } h \in]0, S_2[, \text{ pour tout } j \in [0, m-1] : \text{ou } (R_j(x_0 - h) R_{j+1}(x_0 - h) > 0 \text{ et } R_j(x_0 + h) R_{j+1}(x_0 + h) > 0)$$

$$\text{ou } (R_j(x_0 - h) R_{j+1}(x_0 - h) < 0 \text{ et } R_j(x_0 + h) R_{j+1}(x_0 + h) < 0).$$

$$\text{En donc si } h \in]0, S_2[, \quad R_j(x_0 - h) R_{j+1}(x_0 - h) \text{ et } R_j(x_0 + h) R_{j+1}(x_0 + h)$$

$$\text{sont non nuls et de même signe pour tout } j \in [0, m-1].$$

$$\text{Donc si } h \in]0, S_2[\text{ le nombre de changements de signe de } (R_0(x_0 - h), \dots, R_m(x_0 - h))$$

$$\text{est le même que le nombre de changements de signe de } (R_0(x_0 + h), \dots, R_m(x_0 + h)).$$

$$\text{Ainsi si } h \in]0, S_2[, \quad C_2(x_0 - h) = C_2(x_0 + h).$$

$$\exists S_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall h \in]0, S_2[, \quad C_2(x_0 - h) = C_2(x_0 + h).$$

$$b) \exists j \in [1, m-1], R_j(x_0) = 0.$$

$$\text{Posons alors } J = \{j \in [1, m] \mid R_j(u_0) = 0\}.$$

$$J \text{ n'est pas vide et } J \text{ ne contient ni 1 ni } m \quad (R_1(u_0) = -P'(u_0) \neq 0 \text{ et } R_m(u_0) \neq 0)$$

$$\text{Alors } J \text{ n'est pas vide et } J \subset [2, m-1].$$

$$\bullet \text{ Soit } j \in [1, m] - J. \quad R_j(u_0) \neq 0. \text{ Alors } \exists \eta_j \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } R_j$$

$$\text{soit strictement positif ou strictement négatif sur }]x_0 - \eta_j, x_0 + \eta_j[.$$

Soit $j \in J$. $2 \leq j \leq m-1$. $R_j(u_0) = 0$ d'ac $(R_{j-1}, R_{j+1})(u_0) < 0$.

Comme R_{j-1}, R_{j+1} est continu sur $\mathbb{R}$: il existe un réel $\tilde{u}_j$ strictement positif tel que $\forall u \in]u_0 - \tilde{u}_j, u_0 + \tilde{u}_j[$, $(R_{j-1}, R_{j+1})(u) < 0$.

Comme $R_j(u_0) = 0$: $\exists \tilde{u}_j^* \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall u \in]u_0 - \tilde{u}_j^*, u_0 + \tilde{u}_j^*[$ $\neq u_0$, $R_j(u) \neq 0$
 Pour $\eta_j = \pi(u, \tilde{u}_j^*, \tilde{u}_j^*)$.

$\forall u \in]u_0 - \tilde{u}_j, u_0 + \tilde{u}_j[$ $\neq u_0$, $R_j(u) \neq 0$ et $R_{j+1}(u) R_{j-1}(u) < 0$.

Soit $x \in]u_0 - \tilde{u}_j, u_0 + \tilde{u}_j[$ $\neq u_0$.

ou $R_{j-1}(x) R_j(x) > 0$ et alors $R_{j+1}(x) R_j(x) < 0$

ou $R_{j-1}(x) R_j(x) < 0$ et alors $R_{j+1}(x) R_j(x) > 0$

Dans les deux cas le nombre de changements de signe dans $(R_{j-1}(x), R_j(x), R_{j+1}(x))$ est 1.

On en conclut $S_2 = \pi(u, \eta_1, \dots, \eta_m)$. Soit $x \in]u_0 - S_2, u_0 + S_2[$ $\neq u_0$.

Soit $j \in J$. $\rightarrow$ si $R_j(u) \neq 0$: R_j est strictement positif ou strictement négatif sur $]u_0 - S_2, u_0 + S_2[$.

$\rightarrow$ si $R_j(u_0) = 0$: $j \in \{2, m-1\}$ et pour tout x dans

$]u_0 - S_2, u_0 + S_2[$ $\neq u_0$ le nombre de changements de signe de la liste $(R_{j-1}(x), R_j(x), R_{j+1}(x))$ est 1.

Soit I l'ensemble des éléments i de $\{1, m\}$ tels $R_i(u_0) \neq 0$ et pour tout $h \in]0, S_2[$ le nombre de changements de signe de la liste $(R_1(u_0+h), \dots, R_i(u_0+h))$ soit le même que le nombre de changements de signe de la liste $(R_1(u_0-h), \dots, R_i(u_0-h))$

$1 \in I$ d'ac S est une partie non vide de $\{1, m\}$. Alors I possède un plus grand élément s . Noter que si $s = m$ le résultat demandé est prouvé.

Supposons $s < m$ et montrons que cela conduirait à une contradiction.

1^{er} Cas... $R_{D+1}(x_0) \neq 0$. Comme $R_D(x_0) \neq 0$ les deux fonctions R_D et R_{D+1}

garden un signe constant et ne s'annule pas sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Alors $\forall h \in]0, \delta[$: le nombre de changements de signe dans les listes

$(R_D(x_0+h), \dots, R_{D+1}(x_0+h))$ et $(R_D(x_0-h), \dots, R_{D+1}(x_0-h))$ (resp. $(R_D(x_0+h), R_{D+1}(x_0+h))$

et $(R_D(x_0-h), R_{D+1}(x_0-h))$) est le même.

On étend de même pour les listes $(R_D(x_0+h), \dots, R_{D+1}(x_0+h))$ et

$(R_D(x_0-h), \dots, R_{D+1}(x_0-h))$ et ceci pour tout $h \in]0, \delta[$.

Alors $D+1 \in J$ et D est le maximum de J !!

2^{ème} Cas... $R_{D+1}(x_0) = 0$. Alors $D+2 \leq n$. Soit $h \in]0, \delta[$.

le nombre de changements de signe dans les listes $(R_D(x_0+h), \dots, R_{D+1}(x_0+h))$ et

$(R_D(x_0-h), \dots, R_{D+1}(x_0-h))$ (resp. $(R_D(x_0+h), R_{D+1}(x_0+h), R_{D+2}(x_0+h))$ et

$(R_D(x_0-h), R_{D+1}(x_0-h), R_{D+2}(x_0-h))$) est le même.

Ainsi le nombre de changements de signe dans les listes $(R_D(x_0+h), \dots, R_{D+2}(x_0+h))$ et

$(R_D(x_0-h), \dots, R_{D+2}(x_0-h))$ est le même et ceci pour tout $h \in]0, \delta[$. $D+2 \in J$ et D est le maximum de J !!

Finalement $D = n$ et alors pour tout h dans $]0, \delta[$, $C_2(x_0+h) = C_2(x_0-h)$.

Conclusion... $\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in]0, \delta_2[$, $C_2(x_0+h) = C_2(x_0-h)$.

c) $S := \min(S_1, \delta_2)$ et $h \in]0, S[$. $C_1(x_0+h) - C_1(x_0-h) = 1$ et $C_2(x_0+h) = C_2(x_0-h)$.

Alors $C(x_0+h) - C(x_0-h) = C_1(x_0+h) + C_2(x_0+h) - C_1(x_0-h) - C_2(x_0-h) = 1$.

Ainsi $\forall P(x_0) = 0$: $\exists S \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall h \in]0, S[$, $C(x_0+h) - C(x_0-h) = 1$.

Ne reste plus qu'à lier entre les lignes de ce qui précède pour chacune.

Encore un concepteur qui ne s'est pas donné la peine d'écrire une vraie relation à "sa" sujet.

En reprenant la même démarche que celle de la démonstration de b_j (qui n'utilise pas $P(u_0)$ mais plus fondamentalement : $\exists j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $P_j(x_0)$ donc $P_j(u_0) P_{j+1}(u_0) < 0$, et $P_n(x_0) \neq 0$) on obtient sans difficulté le résultat suivant : si κ est un réel tel que $P(\kappa) \neq 0$ alors il existe un réel strictement positif tel que $\forall h \in \mathbb{J}0, \delta \mathbb{I}$, $C(\kappa+h) = C(\kappa-h)$.

Ce résultat et celui obtenu au début de c_j montrent que $\kappa \mapsto C(\kappa)$ augmente d'une unité si et seulement si κ "traverse" une racine ^{réelle} de P .

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$, $P(a) \neq 0$ et $P(b) \neq 0$.

a et b n'étant pas racine de P , C augmente entre a et b d'autant d'unités que P a de racines réelles dans $]a, b[\dots$ ou dans $[a, b]$.

Ainsi si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et si $a < b$, $\forall a \neq 0$, $P(b) \neq 0$: $C(b) - C(a)$ est le

nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$.

(Q4) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \geq 1$ et $P(\alpha) = 0$. $\alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k = 0$.

$$|\alpha|^n = |\alpha^n| = \left| - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k \alpha^k| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^{n-1} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ |k| \geq 1 \dots \text{et } |a_k| \geq 0 \end{matrix}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \geq 1$ et $P(\alpha) = 0$ donc $|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1^{er} Cas.. $|\alpha| < 1$. Alors $|\alpha| < 1 \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

2nd Cas.. $|\alpha| \geq 1$. Alors $|\alpha| = \frac{|\alpha|^n}{|\alpha|^{n-1}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \Rightarrow \alpha \in \left[-\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right), 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right]$.

- b) l'algorithme qui suit suppose que $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et que les racines réelles de P sont simples.
- E1 on détermine P' .
 - E2 on divise euclidienne jusqu'à obtenir un reste nul on construit la suite $R_1, R_2, \dots, R_n$.
 - E3 on cherche deux réels a et b tels que $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \subset]a, b[$.
il suffit de prendre $b > 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$ et $a = -b$!
 - E4 on calcule $C(a)$ et $C(b)$ (en utilisant la fonction de @J !)
 - E5 on affiche $C(b) - C(a)$.

Q5 Pour moi n ne sera pas une constante ! le principe de la fonction :

1° on cherche le rang j du premier terme non nul de la suite si il existe et on donne à j la valeur n dans le cas contraire.

Ainsi si j a pris la valeur n ou tous les termes de la suite sont nuls ou seul le dernier est non nul. Dans les deux cas le nombre de changements de signe est 0.

2° supposons $j < n$. le nombre de changements de signe dans la suite $(T[1], \dots, T[n])$ est le nombre de changements de signe dans la suite $(T[j], \dots, T[n])$ et $T[j] \neq 0$.

→ on stocke $T[j]$ dans une variable d

→ on regarde alors si $T[j+1], T[j+2], \dots, T[n]$ provoquent un changement de signe.

• Pour $T[j+1]$: 1^{er} Cas... $T[j+1] = 0$ on ne fait rien.

2nd Cas... $T[j+1] \times d > 0$ alors il n'y a pas de changement de signe ; on ne fait rien !! Noter que d a le même signe que $T[j+1]$ donc il n'est pas utile de le modifier

3rd Cas... $T[j+1] \times d < 0$. Il y a un changement de signe. On stocke $T[j+1]$ dans d et augmente le compteur c des changements de signe d'une unité.

• Il ne reste plus qu'à faire la même chose pour $T[j+2], T[j+3], \dots, T[n]$.

Remarque... Il est plus raisonnable de stocker dans d un signe plus qu'une valeur. Vous trouverez une version utilisant cela p. 7 !

```

Program HEC_2006_MII;

const LongMax=10;

Type tab=array[1..LongMax] of real;

Function nbchgs(n:integer;T:tab):integer;
var j,c,k:integer;d:real;
begin
  j:=0;c:=0;
  repeat
    j:=j+1;
  until (T[j]<>0) or (j=n);

  if j<n then begin
    d:=T[j];
    for k:=j+1 to n do
      if d*T[k]<0 then begin
        c:=c+1;d:=T[k];
      end;
    end;

    nbchgs:=c;
  end;

```

... puis le programme principal.

PARTIE III

(Q1) Rappelons que si α est une racine d'axe k ($k \in \mathbb{N}^*$) de P alors α est une racine d'axe au moins $k-1$ (à un petit abus près pour $k=0$).

1^{ère} cas... P n'a pas de racine dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$$\text{Alors } N_1(P) = 0 \text{ donc } N_2(P) \leq N_2(T(P)) + 2$$

2^{ème} cas... P a une unique racine α , d'axe k , dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Alors α est racine d'axe $k-1$ de P' donc de $T(P)$ car α n'est pas nulle.

$$\text{Alors } N_2(T(P)) \geq k-1 = N_2(P)-1; \quad N_2(T(P)) + 2 \geq N_2(P) + 1 \geq N_2(P).$$

$$\text{Ainsi } N_2(P) \leq N_2(T(P)) + 2$$

3^{ème} cas... P admet au moins deux racines distinctes dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Notons r le nombre de racines distinctes dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$ les racines distinctes de P dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Montrons que $N_2(T(P)) = N_2(P')$ car $0 \notin] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Rappelons que

$$N_2(P) \leq N_2(P') + 2 \text{ ou que } N_2(P') \geq N_2(P) - 2.$$

Pour tout i dans $[1, r]$, notons k_i l'axe de multiplicité de λ_i dans P ; $N_2(P) = \sum_{i=1}^r k_i$.

Alors pour tout i dans $[1, r]$, $\lambda_i \in] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et λ_i est une racine de P' d'axe $k_i - 1$.

Soit $i \in [1, r-1]$. Peut-on dire $\exists \lambda_i, \lambda_{i+1}]$ et $P(\lambda_i) = P(\lambda_{i+1}) (= 0)$.

Ainsi à l'échelle de Rolle montre que $\exists \beta_i \in] \lambda_i, \lambda_{i+1}[$, $P'(\beta_i) = 0$.

Ainsi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ sont des racines de P' distinctes de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Si $\lambda_r \leq -1$ alors $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ sont dans $] -\infty, -1]$

Si $\lambda_1 \geq 1$ alors $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$ sont dans $[1, +\infty[$

Supposons $\lambda_1 \leq -1$ et $\lambda_r \geq 1$

$\exists \lambda \in [1, r-1]$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\lambda-1} < \lambda_{\lambda+1} < \lambda_{\lambda+2} < \dots < \lambda_r$.

Alors nécessairement $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\lambda-1}$ sont dans $]-\infty, -1]$ et $\beta_{\lambda+1}, \beta_{\lambda+2}, \dots, \beta_{r-1}$ sont dans $[1, +\infty[$.

Ainsi dans tous les cas au moins $r-2$ éléments de l'ensemble $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}\}$ sont dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Rappelons que pour tout $i \in [1, r]$, λ_i est une racine de P' d'ordre $k_i - 1$ qui appartient à $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

De plus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ sont deux à deux distincts.

$$\text{Alors } N_1(P') \geq \sum_{i=1}^r (k_i - 1) + (r - 2) = \sum_{i=1}^r k_i - r + r - 2 = \sum_{i=1}^r k_i - 2 = N_1(P) - 2$$

$$\text{Ainsi } N_2(P) \leq N_2(P') + 2 = N_2(T(P)) + 2.$$

$$\text{Dans tous les cas : } \underline{\underline{N_2(P) \leq N_2(T(P)) + 2}}$$

b) notons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_2(P) \leq N_2(T^k(P)) + 2k$ à l'aide d'une récurrence plus précisément montrons que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n :
 1° $T^k(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n
 2° $N_2(P) \leq N_2(T^k(P)) + 2k$

• $k=1$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n . Soit a_n le coefficient de X^n dans P . Notons que $T(P) = X P'$ est un polynôme de degré n à coefficients réels. Posons $Q = \frac{1}{a_n} P$.

Q est normalisé et de degré n . Ainsi a) donne $N_2(Q) \leq N_2(T(Q)) + 2$

$Q = \frac{1}{a_n} P$ d'où $T(Q) = X Q' = \frac{1}{a_n} X P'$. Alors $N_2(P) = N_2(Q)$ et

$N_2(T(P)) = N_2(T(Q))$. D'où $N_2(P) \leq N_2(T(P)) + 2$; la propriété est vraie pour $k=1$.

• Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

Soit P un polynôme de degré n . L'hypothèse de récurrence indique que :

$T^k(P)$ est un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$ et $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

Notons que $T^{k+1}(P) = T(T^k(P)) = X(T^k(P))'$ donc $T^{k+1}(P)$ est donc un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ($\deg(T^k(P))' = n-1$).

Q1 a) donne : $N_1(T^k(P)) \leq N_1(T(T^k(P))) + 2 = N_1(T^{k+1}(P)) + 2$

Ainsi $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k \leq N_1(T^{k+1}(P)) + 2 + 2k = N_1(T^{k+1}(P)) + 2(k+1)$.

Ceci achève la récurrence.

Par conséquent :

Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n et $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.

Q2 a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $P^*(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$.

$$P^*(x) = x^n \left[a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} \right]$$

$$P^*(x) = x^n \left[\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{x}\right) + a_0 \right] = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. Remarque... Ceci vaut aussi pour un polynôme P de degré n pas nécessairement normalisé.

b) Notons que $P^*(0) \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $P^*(x) = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $P(x) = 0 \Leftrightarrow P^*\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\Leftrightarrow \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ et $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

1^{er} cas... $N_1(P) = 0$. Alors $N_0(P^*) = 0$

2nd cas... $N_1(P) \neq 0$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les racines distinctes de P dans

$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. D'après ce que nous avons dit plus haut

$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}$ sont les racines distinctes de P^* dans $[-1, 1]$.

Il ne reste plus qu'à faire coïncider les ordres de multiplicité.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Soit ℓ_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans P .

$P = (x - \lambda_i)^{\ell_i} Q_i$ avec $Q_i \in \mathbb{R}[x]$ et $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. On a $\deg Q_i = n - \ell_i$ et Q_i est unitaire.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $P^*(x) = x^n P(\frac{1}{x}) = x^n (\frac{1}{x} - \lambda_i)^{\ell_i} Q_i(\frac{1}{x})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, P^*(x) = (1 - \lambda_i x)^{\ell_i} x^{n - \ell_i} Q_i(\frac{1}{x}) = \lambda_i^{\ell_i} (\frac{1}{\lambda_i} - x)^{\ell_i} Q_i^*(x).$$

P^* et $\lambda_i^{\ell_i} (\frac{1}{\lambda_i} - x)^{\ell_i} Q_i^*$ coïncident sur $\mathbb{R}^n$ donc sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Ainsi } P^* = (-\lambda_i)^{\ell_i} (x - \frac{1}{\lambda_i})^{\ell_i} Q_i^*. \text{ Or } Q_i^*(\frac{1}{\lambda_i}) = (\frac{1}{\lambda_i})^{\ell_i} Q_i(\lambda_i) \neq 0.$$

Ainsi $\frac{1}{\lambda_i}$ est une racine de P^* d'ordre ℓ_i .

$$\text{Ainsi } N(P^*) = \sum_{i=1}^n \ell_i = N_1(P). \quad N(P^*) = N_2(P).$$

Finalement donc on a : $N_0(P^*) = N_1(P)$.

Q3 **V3** Rappelons que deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R}^n$ sont égaux (leur différence admet une infinité de racines...).

Pour montrer que $\forall h \in \mathbb{N}^n$, $(T^h(P))^* = n^h Q_h$ il suffit de montrer que
 $\forall h \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $(T^h(P))^*(x) = n^h Q_h(x)$. Ce que nous allons faire par récurrence.

$$\text{On a donc que } \forall h \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}, Q_h(x) = \sum_{i=0}^{n-1-h} a_{n-i} (1 - \frac{i}{n})^h x^i$$

$$\bullet \quad \forall x \in \mathbb{R}, T(P)(x) = x P'(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, (T(P))^*(x) = x^n \frac{1}{x} P'(\frac{1}{x}).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (T(P))^*(x) = x^{n-1} \sum_{j=1}^n j Q_j(\frac{1}{x})^{j-1} = \sum_{j=1}^n j a_j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j x^{n-j}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (T(P))^*(x) = \sum_{i=0}^n (n-i) a_{n-i} x^i = n \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} (1 - \frac{i}{n})^1 x^i = n^1 Q_1(x)$$

la propriété est donc vraie pour $k=1$.

- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$$(T^k(P))^n = n^k Q_k.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (T^k(P))^n(x) = n^k Q_k(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, n^k Q_k(x) = x^n (T^k(P))\left(\frac{1}{x}\right) \quad (T^k(P) \text{ est de degré } n \dots).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, n^k Q_k\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n (T^k(P))(x). \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, T^{k+1}(P)(x) = n^k x^n Q_k\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}^n, T^{k+1}(P)(x) = n^k x \left[n x^{n-1} Q_k\left(\frac{1}{x}\right) + x^n \left(-\frac{1}{x^2}\right) Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, T^{k+1}(P)(x) = n^k \left[n x^n Q_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-1} Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^n. \quad x^n Q_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k x^{n-i}.$$

$$x^{n-1} Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k \cdot i \cdot x^{n-i} \left(\frac{1}{x}\right)^{i-1}.$$

$$x^{n-1} Q_k'\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k \cdot i \cdot x^{n-i}.$$

$$\text{Alors } T^{k+1}(P)(x) = n^k \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k x^{n-i} (n-i) \right]$$

$$T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{k+1} x^{n-i}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{k+1} x^{n-i}$$

$$\text{puisque } \forall x \in \mathbb{R}, T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{k+1} x^{n-i}$$

$$\text{ou } \forall x \in \mathbb{R}, T^{k+1}(P)(x) = n^{k+1} \sum_{j=1 \text{ ou } 0}^n a_j \left(1 - \frac{n-j}{n}\right)^{k+1} x^j = n^{k+1} \sum_{j=0}^n a_j \left(1 - \frac{n-j}{n}\right)^{k+1} x^j.$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, (T^{k+1}(P))^n(x) = n^{k+1} \sum_{j=0}^n a_j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{k+1} x^j = n^{k+1} Q_{k+1}(x).$$

par définition de $(T^{k+1}(P))^n$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T^{k+1}(P))^n(x) = n^{k+1} Q_{k+1}(x) \text{ ce qui achève la récurrence.}$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*, (T^k(P))^n = n^k Q_k.}}$$

V2 Extrapolons le T ! Pour $\forall Q \in \mathbb{R}[X], T(Q) = XQ'$.

T est donc une automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$$P = \sum_{j=0}^n a_j X^j \text{ toujours avec } a_n = 1.$$

$$\text{Alors } T(P) = \sum_{j=0}^n a_j T(X^j) \text{ et même } \forall k \in \mathbb{N}^*, T^k(P) = \sum_{j=0}^n a_j T^k(X^j).$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, T(X^j) = X^j X^{j-1} = j X^{j-1}. \text{ Donc } \forall j \in \mathbb{N}, T(X^j) = j X^{j-1}.$$

$$\text{Pour une simple récurrence donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, T^k(P) = j^k X^{j-k} \text{ et ceci pour tout } j \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } T^k(P) = \sum_{j=0}^n a_j j^k X^{j-k} \text{ pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, T^k(P) = a_n n^k X^n + a_{n-1} (n-1)^k X^{n-1} + \dots + a_1 1^k X + a_0 0^k X^0.$$

$$\text{Mais } \forall k \in \mathbb{N}^*, (T^k(P))^n = a_0 0^k X^n + a_1 1^k X^{n-1} + \dots + a_{n-1} (n-1)^k X + a_n n^k X^0.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (T^k(P))^n = \sum_{j=0}^n a_{n-j} (n-j)^k X^j = n^k \sum_{j=0}^n a_{n-j} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^k X^j.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (T^k(P))^n = \underset{a_n=1}{n^k} \left[1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) X + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k X^{n-1} \right]$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*, (T^k(P))^n = n^k \mathcal{G}_k.}}$$

Remarque... difficile de proposer cette relation avec le Théorème étroit du lemme.

Q4 a) $\tilde{f}: y \mapsto e^{-y}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \tilde{f}'(y) = -e^{-y}$ et $\tilde{f}''(y) = e^{-y}$
 $\forall y \in \mathbb{R}, \tilde{f}''(y) \geq 0$. $\tilde{f}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Alors la courbe représentative
 est au-dessus de toutes ses tangentes, à particularité de celle au point d'abscisse 0.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, \tilde{f}(y) \geq \tilde{f}'(0)(y-0) + \tilde{f}(0)$

$\forall y \in \mathbb{R}, e^{-y} \geq (-e^{-0})(y-0) + e^{-0}$.

$\forall y \in \mathbb{R}, e^{-y} \geq -y + 1$ et $e^{-y} > 0$

qui peut être plus ou moins...

Alors $\forall y \in \mathbb{R}, 1 = e^{-y} e^y \geq (1-y)e^y$. $\forall y \in \mathbb{R}, (1-y)e^y \leq 1$!!

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k = N_0((T^k(P))^*) + 2k = N_0(u^k Q_k) + 2k$
 $\uparrow$ ϕ_2 b appliqué à $T^k(P)$ qui est de degré n .
 Or $N_0(u^k Q_k) = N_0(Q_k)$.

Alors $N_1(P) \leq 2k + N_0(Q_k)$.

Pour obtenir le résultat il suffit de prouver que $N_0(Q_k) \leq \frac{n}{k} h(L(P))$.

Pour $r=1$ et $s = e^{\frac{k}{n}}$.

Noter que • $Q_k(0) = 1 \neq 0$.

• $0 < r < s$

• Soit $z \in D_s$. $|Q_k(z)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(1 - \frac{r}{s}\right)^{\frac{k}{n}} z^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| \left|1 - \frac{r}{s}\right|^{\frac{k}{n}} |z|^i$

$|Q_k(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| \left|1 - \frac{r}{s}\right|^{\frac{k}{n}} |z|^i = \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| \left(1 - \frac{r}{s}\right)^{\frac{k}{n}} \left(e^{\frac{k}{n}}\right)^i$

$|Q_k(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| \left(\left(1 - \frac{r}{s}\right) e^{\frac{k}{n}} \right)^i$

$\forall i \in [0, n-1], 0 \leq \left(1 - \frac{r}{s}\right) e^{\frac{k}{n}} \leq 1$ car $\forall i \in [0, n-1], \left(\left(1 - \frac{r}{s}\right) e^{\frac{k}{n}} \right)^i \leq 1$ et $|a_{n-i}| \geq 0$

Alors $|Q_k(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| = \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{i=0}^n |a_i| = |a_n| + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$

Pour $s = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Alors $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall z \in D_s, |Q_k(z)| \leq s$.

le résultat admet donc : $N_0(Q_k) \leq \frac{1}{\ln 5} \ln \left(\frac{5}{|Q_k|} \right)$ car $r=1$.

$$\text{Avec } N_0(Q_k) \leq \frac{1}{\ln 5} \ln \frac{5}{1} = \frac{1}{\ln 5} \ln 5 = \frac{1}{\ln 5} \ln 5 = \frac{n}{k} \ln 5 = \frac{n}{k} \ln \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right).$$

$$\text{Finalement } N_3(P) \leq 2k + N_0(Q_k) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right).$$

$$\text{Donc } N_3(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P)) \text{ avec } L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

$$\square \text{ i) } \psi \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi'(x) = 2 \cdot \frac{\theta}{x^2} = \frac{2}{x^2} \left[x^2 - \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \psi'(x) = \frac{2}{x^2} (x - \sqrt{\frac{\theta}{2}})(x + \sqrt{\frac{\theta}{2}}).$$

ψ est croissante sur $[\sqrt{\frac{\theta}{2}}, +\infty[$ et décroissante sur $]0, \sqrt{\frac{\theta}{2}}]$.

Δ Nous
supposons
dans i et ii)
 $\theta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$$

$$\text{ii) } \psi(\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 1) = 2\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 2 + \theta \frac{1}{\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 1} \leq 2\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 2 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta}{2}}} = 2\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 2 + \sqrt{2\theta} = \sqrt{2\theta} + 2 + \sqrt{2\theta}.$$

$$\underline{\underline{\psi(\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}.$$

$$\text{iii) soit } k \in \mathbb{N}^*. N_3(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) = 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P)).$$

si car... $k(L(P)) = 0$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, N_3(P) \leq 2k$ donc $N_3(P) \leq 2$.

$$\text{Alors } N_3(P) \leq 2 = 2 + 0 = 2 + k \sqrt{2 \ln(L(P))}.$$

$$\text{2° car... } k(L(P)) \neq 0. \text{ On a : } k(L(P)) = k \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \geq k \cdot 1 = 0.$$

Ainsi $k(L(P)) > 0$. Posons $\theta = nk(L(P))$, $\theta > 0$.

$$\text{Par conséquent } \psi(\sqrt{\frac{\theta}{2}} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta} = 2 + k \sqrt{2 \ln(L(P))}.$$

L'intervalle $[\sqrt{\frac{p}{2}}, \sqrt{\frac{p}{2}} + 1]$ contient au moins un élément ℓ_0 de $\mathbb{N}^*$... prouve

Alors par accréance de ψ sur $[\sqrt{\frac{p}{2}}, \sqrt{\frac{p}{2}} + 1]$ on a : $\ell_0 = \text{Ent}(\sqrt{\frac{p}{2}}) + 1$.

$$\psi(\ell_0) \leq \psi(\sqrt{\frac{p}{2}} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{\ln h(L(p))}.$$

$$\text{Ainsi } N_1(p) \leq 2\ell_0 + \frac{n}{\ell_0} h(L(p)) = \psi(\ell_0) \leq 2 + 2\sqrt{\ln h(L(p))}.$$

$$\underline{\underline{N_1(p) \leq 2 + 2\sqrt{\ln h(L(p))}}}$$

d) Montrons le résultat principal.

$a_0 \neq 0$. Ainsi P^p est de degré n et de coefficient dominant a_0 .

$$P^p(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \quad (a_n = 1).$$

$$\frac{1}{a_0} P^p(X) = X^n + \frac{a_1}{a_0} X^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} X + \frac{a_n}{a_0}.$$

$$\text{Notons que } N_0(P) = N_1(P^p) = N_2\left(\frac{1}{a_0} P^p\right).$$

$$\text{D'après ce qui précède } N_2\left(\frac{1}{a_0} P^p\right) \leq 2 + \sqrt{\ln h(L(\frac{1}{a_0} P^p))}$$

$$L\left(\frac{1}{a_0} P^p\right) = 1 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{a_0} \right| = \sum_{i=0}^n \left| \frac{a_i}{a_0} \right| = \frac{1}{|a_0|} \left[\sum_{i=0}^n |a_i| \right] = \frac{1}{|a_0|} L(P)$$

$$\text{Donc } N_0(P) = N_2\left(\frac{1}{a_0} P^p\right) \leq 2 + \sqrt{\ln h\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}.$$

$$N_0(P) \leq 2 + \sqrt{\ln h\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}. \text{ Notons que } 0 \text{ n'est pas racine de } P \text{ car } a_0 \neq 0.$$

$$\text{Alors } N(P) \leq N_0(P) + N_1(P) \leq 4 + \sqrt{\ln h(L(P))} + \sqrt{\ln h\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}.$$

$$\underline{\underline{N(P) \leq 4 + \sqrt{\ln h\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)} + \sqrt{\ln h\left(\frac{1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_0|}\right)}}}$$

PARTIE IV

Q1) $X_1, X_2, \dots, X_n$, sont n variables aléatoires qui suivent la loi de Poisson de paramètre λ et de plus elles sont indépendantes. Le cours nous dit alors que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$.

Ainsi Z_n suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$.

Q2) Soit $\omega \in \Omega$. D'après III Q4.

$$\pi_n(\omega) = N(\varphi_\omega) \leq 4 + 2\sqrt{d_n h(L(\varphi_\omega))} + 2\sqrt{d_n h(L(\varphi_\omega)/1)}.$$

$$\text{Or } L(\varphi_\omega) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |X_i(\omega)| + 1 = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} |X_i(\omega)| = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\omega) = Z_n(\omega) + 2.$$

$$\text{Alors } \pi_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{d_n h(Z_n(\omega) + 2)} = 4 + 4\sqrt{d_n} \sqrt{h(Z_n(\omega) + 2)}.$$

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{d_n} \sqrt{h(Z_n(\omega) + 2)}.$$

Q3) a) B'at au cours !! La courbe représentative de h est en dessous de toutes ses tangentes. Ainsi $\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, $h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

ou soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. $\hat{p}: x \mapsto h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0) - h(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \hat{p}'(x) = h'(x_0) - h'(x).$$

h est concave sur $\mathbb{R}_+$ et de donc $\hat{p}'$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $\hat{p}'$ est négative sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\hat{p}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Alors } \forall x \in [0, x_0], h'(x_0) - h'(x) \leq 0 \text{ et } \forall x \in [x_0, +\infty[, h'(x_0) - h'(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [0, x_0], \hat{p}'(x) \leq 0 \text{ et } \forall x \in [x_0, +\infty[, \hat{p}'(x) \geq 0. \hat{p} \text{ est décroissante sur } [0, x_0]$$

et croissante sur $[x_0, +\infty[$. $\hat{p}$ possède alors un minimum en x_0 qui vaut

$$\hat{p}(x_0) \text{ donc } 0. \forall x \in \mathbb{R}_+, \hat{p}(x) \geq 0. \forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0) - h(x) \geq 0.$$

$$\text{Finalement } \forall x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0).$$

b) v1 $W(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(h(W))$ et $E(W)$ existent.

Posons $x_0 = E(W)$; $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $h(\ell) \leq h'(x_0)(\ell - x_0) + h(x_0)$ et $P(W=\ell) \geq 0$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $h(\ell) P(W=\ell) \leq h'(x_0) \ell P(W=\ell) - x_0 h'(x_0) P(W=\ell) + h(x_0) P(W=\ell)$.

Notons que $\sum_{\ell=0}^{+\infty} P(W=\ell) = 1$ et que $E(h(W)) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} h(\ell) P(W=\ell)$ (Règle de dérivée d'attente)

Notons aussi que $E(W)$ existe et vaut $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell P(W=\ell)$.

Ainsi $E(h(W)) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} h(\ell) P(W=\ell) \leq h'(x_0) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell P(W=\ell) - x_0 h'(x_0) \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(W=\ell) + h(x_0) \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(W=\ell)$

car toutes les séries convergent.

ce qui donne $E(h(W)) \leq \underbrace{h'(x_0) E(W) - x_0 h'(x_0)}_{=0 \text{ car } x_0 = E(W)} + h(x_0) = h(x_0) = h(E(W))$.

v2... $\forall \omega \in \Omega$, $h(W(\omega)) \leq h'(x_0)(W(\omega) - x_0) + h(x_0)$.

Ainsi $h(W) \leq h'(x_0)(W - x_0) + h(x_0)$.

Notons que d.. $E(h(W))$ existe.

d'o.. $E(W)$ ^{existe} d'ac $E(h'(x_0)(W - x_0) + h(x_0))$ existe et vaut

$h'(x_0) E(W) - x_0 h'(x_0) + h(x_0)$ ou $h(x_0)$ ou encore $h(E(W))$ car $x_0 = E(W)$.

La linéarité de l'espérance donne alors : $E(h(W)) \leq E(h'(x_0)(W - x_0) + h(x_0)) = h(E(W))$.

$E(h(W)) \leq h(E(W))$.

Q4 a) Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) = h(x+1)$.

u est de classe $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \geq 0$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition φ est de classe $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{1}{x+1}$.

$\forall \lambda \dots, x \mapsto x+2$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ donc $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ est décroissante et (strictement) positive sur $\mathbb{R}^+$

• Rappelons que $t \mapsto t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^0$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$x \mapsto x+2$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, $u \mapsto h(u+1)$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. $x \mapsto \sqrt{h(x+1)}$ est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
Alors $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{h(x+1)}} \left(\text{ou } x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{h(x+1)}} \right)$ est décroissante et (strictement) positive sur $\mathbb{R}^+$.

$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{h(x+1)}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont décroissantes et positives sur $\mathbb{R}^+$. Le produit

φ' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Mais φ est concave sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi''(x) = \frac{1}{2} \left[- \frac{h'(x+1)(x+2)}{(\sqrt{h(x+1)})^3} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\sqrt{h(x+1)}} \cdot \left(- \frac{1}{(x+2)^2} \right) \right] < 0 !$$

φ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

b) Par concavité $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \leq \varphi'(0)(k-0) + \varphi(0) = \varphi'(0)k + \varphi(0)$.

Prenons $b = \varphi'(0)$ et $c = \varphi(0)$. $a^k/k! \geq 0$

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sqrt{h(k+1)} \frac{a^k}{k!} \leq bk + \frac{a^k}{k!} + c \frac{a^k}{k!} = ba \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} + c \frac{a^k}{k!}.$$

de plus les séries de termes généraux $\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$ et $\frac{a^k}{k!}$ sont convergentes ; alors

la série de terme général $ba \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} + c \frac{a^k}{k!}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la

série de terme général $\sqrt{h(k+1)} \frac{a^k}{k!}$ converge.

(Q5) 0] π_n prend ses valeurs dans $[0, n]$ donc π_n possède une espérance.

Rappelons que $Z_n \hookrightarrow \mathcal{P}((n-1)\lambda)$ et posons $a = (n-1)\lambda$. $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Z_n = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

La série de terme général $\frac{a^k}{k!} e^{-a}$ est convergente et même absolument convergente car elle est à terme positif.

Ainsi la série de terme général $\sqrt{k(n-1)} P(Z_n = k)$ est absolument convergente.

La relation de transfert nous que $E(\varphi(Z_n))$ existe.

Alors 1° Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

et φ est de classe $\mathcal{B}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et concave.

2° $E(\varphi(Z_n))$ et $E(Z_n)$ existent.

$$\text{Alors } E(\varphi(Z_n)) \leq \varphi(E(Z_n)) = \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)}.$$

$$\pi_n \leq 4 + 4\sqrt{h_n} \sqrt{h(Z_n + 1)} = 4 + 4\sqrt{h_n} \varphi(Z_n).$$

La $E(\pi_n)$ existe, $E(4 + 4\sqrt{h_n} \varphi(Z_n))$ existe et vaut $4 + 4\sqrt{h_n} E(\varphi(Z_n))$.

Ainsi la concavité de l'espérance donne : $E(\pi_n) \leq 4 + 4\sqrt{h_n} E(\varphi(Z_n)) \leq 4 + 4\sqrt{h_n} \varphi(E(Z_n))$

$$\text{Alors } \underline{E(\pi_n) \leq 4 + 4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)}}.$$

$$\frac{h((n-1)\lambda + 1)}{h_n} = 1 + \frac{1}{h_n} h\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda + \frac{1}{n}\right) \text{ pour } n \geq 2.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h((n-1)\lambda + 1)}{h_n} = 1; \quad h_n((n-1)\lambda + 1) \sim h_n.$$

$$4 = o\left(4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)}\right) \text{ donc } 4 + 4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)} \sim 4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)}$$

$$\text{Donc } 4 + 4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)} \sim 4\sqrt{h_n} h_n. \text{ Soit } \beta \in]\frac{1}{2}, 1[.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + 4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)}}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt{h_n} h_n}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 h_n}{n^{\beta - \frac{1}{2}}} = 0 \text{ (concavité concave)}$$

$$\text{Rien } 0 \leq \frac{E(\pi_n)}{n^\beta} \leq \frac{4 + 4\sqrt{h_n} \sqrt{h((n-1)\lambda + 1)}}{n^\beta} \text{ pour } n \geq 2. \text{ Par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\pi_n)}{n^\beta} = 0$$