83.0.1
92.0.8

J. 0241

SESSION DE 2000

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

sections : mathématiques breton

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et, pour p et q éléments de $\mathbb{N}$ vérifiant $p \leqslant q$,

$$[\![p,q]\!] = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ et } p \leqslant m \text{ et } m \leqslant q\}$$

On note également :

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.

La lettre n désignant un nombre entier naturel, on note :

$\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

Quel que soit le polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ que l'on considère, on identifie dans tout le problème le polynôme P et la fonction $x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui lui est naturellement associée.

La lettre k désignant un entier naturel et la lettre I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, on note :

$\mathcal{C}^k(I)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des applications f de I vers $\mathbb{R}$ k fois dérivables sur I et de dérivée k^{e} continue.

En particulier, $\mathcal{C}^0(I)$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des applications f de I vers $\mathbb{R}$ continues sur I.

Si f est une application d'un ensemble J contenant I vers $\mathbb{R}$ et que la restriction de f à I appartient à $\mathcal{C}^k(I)$, on peut considérer que f appartient à $\mathcal{C}^k(I)$.

Soit I un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$, appelé segment.
Si f est un élément quelconque de $\mathcal{C}^0(I)$, on appelle norme infinie de f le réel

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t \in I} |f(t)|$$

On rappelle que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ de $\mathcal{C}^0(I)$ vers $\mathbb{R}$ est une norme (appelée norme infinie ou norme de la convergence uniforme) et que, muni de cette norme, $\mathcal{C}^0(I)$ est une algèbre de Banach.

On admet le théorème de Weierstrass-Stone :

L'intervalle I de $\mathbb{R}$ étant fermé, borné et non vide, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$, pour tout réel strictement positif ε, il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Enfin, si $(E, \|\ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et si u est un endomorphisme continu de E, on note $|||u|||$ la norme "subordonnée" de u, soit

$$|||u||| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \|u(x)\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Le principal objectif de ce problème est d'exposer le principe de certaines méthodes d'intégration approchée généralement dénommées "quadratures de Gauss".

Partie I

ÉTUDE D'UNE SUITE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX : LES POLYNÔMES DE LEGENDRE

I.1. Quel que soit l'entier naturel n, on définit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$L_n : t \longmapsto \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$$

En particulier, L_0 est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ constante de valeur 1.

I.1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.

I.1.b. Expliciter L_1, L_2 et L_3.

I.1.c. Préciser, pour tout entier naturel n, la parité de L_n.

I.1.d. Soit n un entier naturel. Montrer que $L_n(1) = 2^n\, n!$ et calculer $L_n(-1)$.
On pourra utiliser la formule de Leibniz.

I.2. Le couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ étant quelconque, on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

I.2.a. Montrer que la fonction $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ de $\mathcal{C}^0([-1,1]) \times \mathcal{C}^0([-1,1])$ vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

Notons qu'il s'ensuit que l'application $f \mapsto \|f\|_2$ est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire et que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien (séparé).
Sauf mention contraire, on considère dans la suite de la partie I que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est muni de ce produit scalaire.

I.2.b. L'entier naturel n étant non nul, on considère la fonction impaire f_n de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel t appartenant à $[0,1]$,

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si} \quad t < 1/n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.2.b.1. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, f_n appartient à $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

I.2.b.2. Montrer que, pour tout couple (m,n) d'entiers naturels vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$,

$$\|f_m - f_n\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{3n}}$$

I.2.b.3. Si on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\ \|_2$ vers une limite f, montrer que cette limite est impaire et que sa restriction à $]0,1]$ est constante de valeur 1.
L'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\ \|_2$ est-il un espace de Hilbert ?

I.3. Montrer que, pour tous entiers naturels n et m,

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}t^{m+n}}(t^2-1)^m\right)\mathrm{d}t$$

En déduire que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

I.4. L'entier naturel n étant quelconque, on pose

$$K_n = \frac{1}{\|L_n\|_2}\, L_n$$

et l'on note F_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n ; ce sous-espace étant de dimension finie, on note π_n le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ sur F_n.

I.4.a. À l'aide du théorème de Weierstrass-Stone, montrer que, quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$, la suite $(\pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme $\| \ \|_2$.

I.4.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(K_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de F_n.

I.4.c. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout élément f de $\mathcal{C}^0([-1,1])$,

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle\, K_j \qquad \text{et} \qquad \|\pi_n(f)\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle^2$$

I.4.d. Montrer que, quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$, la série de terme général $\langle f, K_n\rangle^2$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n\rangle^2 = \|f\|_2^2$$

Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, K_n(t)\,\mathrm{d}t$?

Partie II

UNE CLASSE DE SUITES ORTHOGONALES DE POLYNÔMES

Soient a un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$, vérifiant $a < b$ dans le cas où a et b sont réels.

On dit *dans ce problème* qu'une fonction continue f de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$ est intégrable sur $]a,b[$ (respectivement absolument intégrable sur $]a,b[$) si

$$\lim_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\(\alpha,\beta)\in]a,b[^2}} \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{respectivement} \lim_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\(\alpha,\beta)\in]a,b[^2}} \int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{respectivement} \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

la valeur de cette limite et on l'appelle intégrale de f (respectivement de $|f|$) sur $]a,b[$.

Attention ! la notion d'intégrabilité ainsi définie est purement réservée à ce problème et ne recouvre pas du tout les notions usuelles d'intégrabilité, en particulier la notion d'intégrabilité au sens de Lebesgue.

On admet que si la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(]a,b[)$ est absolument intégrable sur $]a,b[$, alors elle est intégrable sur $]a,b[$ et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Soit ω une fonction continue de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, strictement positive.
On note E l'ensemble des fonctions continues f de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f^2\omega$ est intégrable sur $]a,b[$.

II.1.

II.1.a. Montrer que, pour tout élément (f,g) de E^2, la fonction $fg\omega$ est intégrable sur $]a,b[$.

Le couple (f,g) étant élément de E^2, on note

$$\langle f,g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que l'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle_\omega$ de E^2 vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, dont on note $f\mapsto\|f\|_\omega$ la norme euclidienne associée.

Dans la suite de la partie II, l'espace E est muni de ce produit scalaire.

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on identifie aux polynômes appartenant à $\mathbb{R}[X]$ qui leur sont naturellement associés.

L'entier naturel n étant quelconque, on note (comme dans la partie I) F_n le sous-espace vectoriel de F constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

II.1.b. Dans le cas où a et b sont tous deux réels, montrer que F est inclus dans E si et seulement si la fonction ω est intégrable sur $]a,b[$.
Dans le cas contraire, montrer que F est inclus dans E si et seulement si, pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto t^n\omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$.

On suppose dans la suite de la partie II que F est inclus dans E.

II.1.c. Montrer qu'il existe dans E une suite orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que, pour tout entier naturel n, $\deg P_n = n$.

II.2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale d'éléments de F tel que, pour tout n, $\deg P_n = n$.
L'entier naturel n étant non nul, on note, s'il en existe, $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les racines (distinctes) de P_n qui sont d'ordre de multiplicité impair et appartiennent à $]a,b[$, et on note Z_n leur ensemble (éventuellement vide). On considère le polynôme

$$Q_n = \begin{cases} P_0 & \text{si } Z_n = \emptyset, \\ (X-r_1)(X-r_2)\ldots(X-r_p) & \text{si } Z_n \neq \emptyset. \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul.

II.2.a. Montrer que $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega \neq 0$.

II.2.b. Montrer que, si $\deg Q_n < n$, alors $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega = 0$.

II.2.c. En déduire que les n racines complexes de P_n sont simples et appartiennent à $]a,b[$.

II.3. *Un nouvel exemple : les polynômes de Laguerre.*
On considère dans cette question le cas particulier où $a = 0$, $b = +\infty$ et $\omega : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.

II.3.a. Montrer que F est inclus dans E et que, pour tout entier naturel n,

$$\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

On note $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite orthonormale d'éléments de F que l'on obtient à partir de la suite $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F en appliquant le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Les polynômes G_n portent le nom de polynômes de Laguerre.

II.3.b. Calculer G_0, G_1 et G_2. Quels sont les zéros de G_2 ?

Partie III

INTERPOLATION POLYNOMIALE

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, q un entier naturel supérieur ou égal à 2, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille d'éléments deux à deux distincts de I.

III.1. *Interpolation de Lagrange.*
L'entier j appartenant à $[\![1,q]\!]$, on définit la fonction polynomiale à coefficients réels

$$\ell_j : t \longmapsto \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant q \\ i\neq j}} \frac{t-x_i}{x_j-x_i}$$

III.1.a. Montrer que l'application

$$(P_1,P_2) \longmapsto \sum_{i=1}^{q} P_1(x_i)\,P_2(x_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ et que, pour ce produit scalaire, la famille $(\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

III.1.b. Quelles sont les coordonnées dans la base $(\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$?

III.1.c. Soit $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille de réels.
Montrer qu'il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ et un seul tel que, pour tout entier i appartenant à $[\![1,q]\!]$, $P(x_i)=y_i$.
Quels sont les polynômes Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout i appartenant à $[\![1,q]\!]$, $Q(x_i)=y_i$?

Si f est une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$, l'unique polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que, pour tout entier i appartenant à $[\![1,q]\!]$, $P(x_i)=f(x_i)$, est appelé le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points x_1, x_2, ... , x_q.

III.1.d. On suppose dans cette question que I est un segment.
Montrer que l'application Λ de $\mathcal{C}^0(I)$ vers $\mathbb{R}_{q-1}[X]$, qui associe à f son polynôme interpolateur de Lagrange aux points x_1, x_2, ... , x_q, est linéaire et surjective.
Montrer que, pour toute application f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$ et tout réel t appartenant à I,

$$|\Lambda(f)(t)| \leqslant \Big(\operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant q} |f(x_j)|\Big)\sum_{j=1}^{q}|\ell_j(t)|$$

On définit l'application χ de I vers $\mathbb{R}$ par la relation

$$\chi(t)=\sum_{j=1}^{q}|\ell_j(t)|$$

On munit les espaces $\mathcal{C}^0(I)$ et $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ $\big($identifié à un sous-espace de $\mathcal{C}^0(I)\big)$ de la norme infinie.
Montrer que l'application linéaire Λ est continue et que

$$|||\Lambda||| = \|\chi\|_\infty$$

III.2. *Interpolation de Hermite.*
Dans la suite de la partie III, on considère q entiers naturels α_1, α_2, ... , α_q et l'on pose

$$m=q+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_q$$

On considère une fonction f de I vers $\mathbb{R}$ admettant, pour tout i appartenant à $[\![1,q]\!]$, une dérivée d'ordre α_i au point x_i.
Montrer qu'il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et un seul tel que, pour tout i appartenant à $[\![1,q]\!]$ et pour tout k appartenant à $[\![0,\alpha_i]\!]$, $P^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i)$.

Ce polynôme est appelé le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points x_1, x_2, ... , x_q relativement aux entiers α_1, α_2, ... , α_q.

On pourra commencer par établir l'injectivité de l'application de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^m$ définie par

$$P \longmapsto \big(P(x_1),P'(x_1),\dots,P^{(\alpha_1)}(x_1),P(x_2),P'(x_2),\dots,P^{(\alpha_2)}(x_2),\ \dots\ ,P(x_q),P'(x_q),\dots,P^{(\alpha_q)}(x_q)\big)$$

III.3. *Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Hermite.*
On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$ de I vers $\mathbb{R}$.
Le réel x appartenant à I, on note J_x le plus petit intervalle fermé contenant x_1, x_2, ... , x_q et x.

On fixe un réel x appartenant à I. On suppose dans (III.3.a,b,c) que x est distinct de x_1, x_2, ... , x_q.
On note H le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points x_1, x_2, ... , x_q relativement aux entiers α_1, α_2, ... , α_q, et H_x le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points x_1, x_2, ... , x_q, x relativement aux entiers α_1, α_2, ... , α_q, 0.
On note p la fonction polynomiale de I vers $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \prod_{i=1}^{q}(t-x_i)^{\alpha_i+1}$$

III.3.a. Montrer qu'il existe un réel μ (dépendant de x) tel que $H_x = H + \mu p$. Expliciter μ en fonction de $f(x)$, $H(x)$ et $p(x)$.

III.3.b. On considère la fonction $\Phi = f - H_x$ de I vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^m$ sur I. Montrer, en procédant par récurrence, qu'il existe un réel ξ appartenant à J_x tel que $\Phi^{(m)}(\xi) = 0$.

III.3.c. En déduire qu'il existe un réel ξ appartenant à J_x tel que

$$f(x) - H(x) = \frac{p(x)}{m!} f^{(m)}(\xi)$$

III.3.d. Montrer que cette conclusion demeure même si x est l'un des réels $x_1, x_2, \ldots, x_q$.

Partie IV

Quadratures de Gauss

On considère l'espace préhilbertien séparé $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega\right)$ défini dans la partie II (dont on reprend les notations, ainsi que l'hypothèse que F est inclus dans E).
On considère une suite orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout entier naturel n,

$$\deg P_n = n$$

On fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 2.
Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de P_n (*cf.* II.2) et soit a_n le coefficient dominant de P_n.

L'entier j étant compris entre 1 et n, on définit le polynôme à coefficients réels

$$\ell_j = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{X - r_i}{r_j - r_i} \qquad (\textit{cf. } \text{III.1})$$

Dans cette partie, on cherche à approcher, pour f appartenant à E, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$.
On met en évidence en (IV.1) des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$:

$$\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, Q(r_j)$$

et en (IV.2), si f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $]a,b[$, on donne une expression du reste obtenu en remplaçant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$. On établit en (IV.3), dans un cas particulier, la convergence de la méthode ainsi définie, puis on termine en (IV.4) par un exemple.

IV.1. *Un théorème de Gauss.*

IV.1.a. Soit Q un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
Montrer qu'il existe un polynôme R appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout t appartenant à $]a,b[$,

$$Q(t) = R(t)\,P_n(t) + \sum_{j=1}^{n} Q(r_j)\,\ell_j(t)$$

IV.1.b. Montrer qu'il existe un n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de réels tel que, pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, Q(r_j) \qquad \textbf{(1)}$$

IV.1.c. Montrer qu'un tel n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est unique et que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont tous strictement positifs.

IV.1.d. La relation **(1)** est-elle également vraie pour tout polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{2n}[X]$?

Tournez la page S.V.P.

IV.2. *Un théorème de Markov.*
On considère une fonction f appartenant à E et de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $]a,b[$.
On note H le polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ interpolant f au sens de Hermite aux points r_1, r_2, ... , r_n relativement aux entiers 1, 1, ... , 1.
Les réels λ_1, λ_2, ... , λ_n sont ceux qui ont été définis en (IV.1.c).

IV.2.a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]a,b[$, il existe un réel ξ appartenant à $]a,b[$ tel que

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!\, a_n^2}\, P_n(x)^2$$

IV.2.b. Montrer que la fonction

$$k:\ x \longmapsto (2n)!\, a_n^2\, \frac{f(x) - H(x)}{P_n(x)^2}$$

est prolongeable par continuité sur $]a,b[$. *C'est ce prolongement que l'on note k dans la suite.*

IV.2.c. Montrer que la fonction $t \mapsto k(t)\, P_n(t)^2 \omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$.

IV.2.d. On pose

$$\beta = \frac{1}{\|P_n\|_\omega^2} \int_a^b k(t)\, P_n(t)^2 \omega(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_a^b k(t)\, P_n(t)^2\omega(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b P_n(t)^2\omega(t)\,\mathrm{d}t}$$

Montrer que, si la fonction k n'est pas constante, alors $\operatorname*{Inf}_{x\in]a,b[} k(x) < \beta < \operatorname*{Sup}_{x\in]a,b[} k(x)$.

IV.2.e. En déduire qu'il existe un réel ζ appartenant à $]a,b[$ tel que $\beta = k(\zeta)$.

IV.2.f. Établir qu'il existe un réel ζ appartenant à $]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(r_k) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!\, a_n^2}\, \|P_n\|_\omega^2$$

IV.3. *Convergence de la méthode dans le cas particulier d'un segment.*
Dans cette question, *l'entier n supérieur ou égal à 2 n'est plus fixé* et, afin de supprimer toute ambiguïté, on note $r_{n,1}$, $r_{n,2}$, ... , $r_{n,n}$ les racines de P_n, ainsi que $\ell_{n,j} = \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{X - r_{n,i}}{r_{n,j} - r_{n,i}}$.
Puis on note $\lambda_{n,1}$, $\lambda_{n,2}$, ... , $\lambda_{n,n}$ les réels définis en (IV.1.b,c).

On suppose que a et b sont des réels et on note I le segment $[a,b]$.
On considère une fonction continue f de I vers $\mathbb{R}$.
On désire montrer que, dans ces conditions, le reste

$$E_n(f) = \left| \int_a^b f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(r_{n,k}) \right|$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

IV.3.a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_{n,k} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} = \int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

IV.3.b. Soit ε un réel strictement positif. On sait, d'après le théorème de Weierstrass-Stone, qu'il existe un polynôme p appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
On note ν la partie entière du nombre $(\deg p)/2$.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$E_n(f-p) \leqslant 2\,\varepsilon \int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que, pour tout entier n strictement supérieur à $\mathrm{Max}(1,\nu)$,

$$E_n(f) \leqslant 2\,\varepsilon \int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

IV.3.c. Conclure.

IV.4. *Un exemple où l'on suppose que la méthode converge.*
On se place dans le cas particulier de la question (II.3) dont on reprend les notations.
On note ψ l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation

$$\psi(t) = \frac{\sin t}{t}$$

IV.4.a. Montrer que, pour tout entier naturel m et tout réel strictement positif x, la fonction $t \mapsto t^m\,\psi(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Le réel x étant strictement positif, on note

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

IV.4.b. *Dérivabilité et dérivée de Ψ sur* $]0,+\infty[$.
Soit x un réel strictement positif fixé.
Justifier, pour tout réel h vérifiant $0 < |h| \leqslant x/2$ et tout réel positif t, l'inégalité

$$\left|\,\mathrm{e}^{-(x+h)\,t} - \mathrm{e}^{-xt} + ht\,\mathrm{e}^{-xt}\,\right| \leqslant \frac{h^2t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-xt/2}$$

En déduire que, pour tout réel h vérifiant $0 < |h| \leqslant x/2$ et tout réel strictement positif X,

$$\left|\int_0^X \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)\,t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h}\,\psi(t) + t\,\mathrm{e}^{-xt}\psi(t)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,|\psi(t)|\,\mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire que Ψ est dérivable au point x et que $\Psi'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\psi(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

IV.4.c. Montrer que, pour tout réel strictement positif x,

$$\Psi'(x) = -\,\frac{1}{1+x^2}$$

IV.4.d. Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, $\Psi(x)$ tend vers 0.

IV.4.e. Déduire des résultats précédents la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(2)}$$

IV.4.f. Dans le cas $n = 2$, calculer des valeurs approchées à la précision permise par votre calculatrice de λ_1, λ_2, $\psi(r_1)$ et $\psi(r_2)$.
En déduire une valeur approchée de l'intégrale **(2)**.
À quelle précision approche-t-on ainsi la valeur de $\pi/4$ donnée par votre calculatrice ?