

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE: 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Après une première partie consacrée à l'étude de la projection sur les convexes fermés de \mathbb{R}^n on établira (dans \mathbb{R}^2) le théorème du point fixe de Brouwer et quelques unes de ses conséquences.

On suppose que \mathbb{R}^n est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $(\cdot | \cdot)$ et $\|\cdot\|$, donc si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de \mathbb{R}^n on a: $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\|x\| = (x|x)^{1/2}$. Si X est une partie de \mathbb{R}^n on notera $\overset{\circ}{X}$ son intérieur, soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ on dira que $u \in X$ est un point fixe de f si $f(u) = u$; si $i \in \{1, \dots, n\}$, f_i désigne la composante de rang i de f , donc $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x))$.

I. Projection sur un convexe fermé de \mathbb{R}^n

1. Démontrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ (inégalité de Schwarz). Montrer que $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires. Montrer que si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^n$ vérifie: $b \neq c$ et $\|a - b\| = \|a - c\|$, on a alors: $\left\|a - \frac{b+c}{2}\right\| < \|a - b\|$.
2. Soit F un fermé non vide de \mathbb{R}^n , soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $u \in F$ tel que: $\|x - u\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$
(on supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général).
3. Soit A un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n , montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $u \in A$ tel que $\|x - u\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in A$.

Ceci établit le théorème de projection sur les convexes de \mathbb{R}^n : soit A un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n , il existe une unique application, notée P , de \mathbb{R}^n dans A qui vérifie: $\|x - P(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in A\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. $P(x)$ s'appelle la projection de x sur A .

4. Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ tel que: $(x - \alpha|y - \alpha) \leq 0$ pour tout $y \in A$, on a: $\alpha = P(x)$.
5. Supposons qu'il existe $y \in A$ tel que: $(x - P(x)|y - P(x)) > 0$.
Soit alors $\mathcal{S} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\mathcal{S}(t) = \|(x - P(x)) - t(y - P(x))\|^2$.
Montrer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que: $\mathcal{S}(t) < \|x - P(x)\|^2$.
6. Déduire de 4. et 5. que $u = P(x)$ si et seulement si: $u \in A$ et $(x - u|y - u) \leq 0$ pour tout $y \in A$.

7. Soit $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$ montrer que: $(x - y|P(x) - P(y)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2$. En déduire que P vérifie les propriétés suivantes: P est continue, $P(\mathbb{R}^n) = A$, $P(x) = x$ si $x \in A$.
8. Montrer que si $x \notin A$, alors $P(x) \notin \overset{\circ}{A}$ (raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une boule de centre $P(x)$, de rayon strictement positif, incluse dans A).

II. Théorème de Brouwer dans \mathbb{R}^2

Pour toute la suite du problème, on se place dans \mathbb{R}^2 ; si $r > 0$, $\overline{B}(O, r)$ désigne le disque fermé de centre O et de rayon r et $S(O, r)$ le cercle correspondant, on note $B = \overline{B}(O, 1)$ et $S = S(O, 1)$. On entend par application dérivable (ou C^1 ou C^2) de B (ou de $B \times \mathbb{R}$) dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}), la restriction à B (ou à $B \times \mathbb{R}$) d'une application dérivable (ou C^1 ou C^2) définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), contenant B (ou $B \times \mathbb{R}$), à valeurs dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}).

A. Cas particulier d'une application de classe C^2

Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, on suppose que f est de classe C^2 et que $f(B) \subset B$ et on se propose de montrer que f possède au moins un point fixe. On va raisonner par l'absurde et supposer que: $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$.

9. Montrer qu'il existe une application $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}_+$, unique, telle que: $x + \rho(x)(x - f(x)) \in S$ pour tout $x \in B$. Expliciter ρ , montrer qu'elle est de classe C^2 et que $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x \in S$. On pose $\alpha(x) = \rho(x)(x - f(x))$ et $\alpha_{ij}(x) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(x)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ et $\varphi(x) = x + \alpha(x)$.

10. Montrer que, pour tout $x \in B$, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$ est singulière (on pourra, à cet effet, caractériser géométriquement l'image de l'application linéaire correspondante).

11. Soit $\psi : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\psi(x, t) = \begin{vmatrix} 1 + t\alpha_{11}(x) & t\alpha_{21}(x) \\ t\alpha_{12}(x) & 1 + t\alpha_{22}(x) \end{vmatrix}$.

- (a) Montrer que: $\psi(x, t) = 1 + t\beta(x) + t^2\gamma(x)$ où β et γ sont des applications continues de B dans \mathbb{R} que l'on explicitera à l'aide des applications $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$. Vérifier que $\psi(x, 1) = 0$ pour tout $x \in B$.

- (b) Soit $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(t) = \iint_B \psi(x, t) dx_1 dx_2$. Justifier l'existence de J et calculer $J(0)$ et $J(1)$.

- (c) Montrer, grâce au théorème de Fubini, que $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0$.

(d) Soit $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 ;

$$\text{soient } I_1(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2, \quad I_2(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) dx_1 dx_2.$$

Montrer que:

$$\begin{aligned} I_1(g) &= \int_{-1}^{+1} \left[g_1(\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-s^2}, s) - g_1(-\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-s^2}, s) \right] ds \\ &\quad - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

On obtient alors, de façon analogue:

$$\begin{aligned} I_2(g) &= \int_{-1}^{+1} \left[g_1(s, \sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, \sqrt{1-s^2}) - g_1(s, -\sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, -\sqrt{1-s^2}) \right] ds \\ &\quad - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Montrer que: $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0$ et donc, que J est constante; montrer que ceci est impossible.

On a ainsi démontré le théorème de Brouwer particulier: toute application de classe C^2 , de B dans B , a au moins un point fixe.

B. Forme générale du théorème de Brouwer

On admettra la généralisation suivante du théorème de Weierstrass: soit F un fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 , soit $g : F \rightarrow \mathbb{R}$. Si g est continue, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une application $g_{(\varepsilon)}$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe C^2 , telle que: $\sup \{|g_{(\varepsilon)}(x) - g(x)| : x \in F\} \leq \varepsilon$.

12. Montrer que si F est un fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 , et si $g : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ une application $g_{(\varepsilon)}$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , de classe C^2 , telle que: $\sup \{\|g_{(\varepsilon)}(x) - g(x)\| : x \in F\} \leq \varepsilon$.
13. Soit $f : B \rightarrow B$, f continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe, d'après 12. une application $f_{(\varepsilon)}$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , de classe C^2 , telle que: $\sup \{\|f_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| : x \in B\} \leq \varepsilon$.
Soit $h_{(\varepsilon)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_{(\varepsilon)}(x) = \frac{f_{(\varepsilon)}(x)}{1 + \varepsilon}$.
Montrer que $h_{(\varepsilon)}(B) \subset B$ et que: $\sup \{\|h_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| : x \in B\} \leq 2\varepsilon$.
14. Montrer que si $f : B \rightarrow B$ est continue, elle possède au moins un point fixe.
15. Soit $r > 0$, soit $f : \overline{B}(O, r) \rightarrow \overline{B}(O, r)$, montrer que si f est continue, elle possède au moins un point fixe (considérer $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = \frac{1}{r}f(rx)$).

16. Soit A un convexe fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 , soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, f continue telle que: $f(A \setminus \overset{\circ}{A}) \subset A$.
- Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que: $A \cup f(A) \subset \overline{B}(O, r)$.
 - On associe au convexe fermé non vide A la projection P , comme cela a été défini en question 3. Soit alors $h : \overline{B}(O, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x) = f(P(x))$. Déduire de l'étude de h que f possède au moins un point fixe dans A . On a donc le théorème de Brouwer général: si A est un convexe fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 , et si $f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue et vérifie: $f(A \setminus \overset{\circ}{A}) \subset A$, alors f possède au moins un point fixe dans A .

III. Quelques conséquences du théorème de Brouwer

17. Soit $f : B \rightarrow S$, telle que: $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Montrer, en étudiant $(-f)$, que f ne peut être continue (ceci constitue le théorème de non rétraction).
18. Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que: f continue et $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Soit alors $y \notin f(B)$, montrer, en étudiant $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $g(x) = \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$, que $y \notin B$. En déduire que: $B \subset f(B)$.
19. Soit $h : S \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que: h est continue et $h(x, 0) = x$ pour tout $x \in S$. Supposons qu'il existe $y \in S$ tel que: $h(x, 1) = y$ pour tout $x \in S$; soit alors f , de B dans S , définie par:
- $$f(x) = \begin{cases} h\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) & \text{si } x \neq O \\ y & \text{si } x = O \end{cases}.$$
- Montrer que f est continue et que cela contredit le théorème de non rétraction: en déduire que $(x \rightarrow h(x, 1))$ ne peut être constante (on dit que S n'est pas contractile).
20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que: f continue, $(f(x) | x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $y \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$, on définit, si $y \notin f(\overline{B}(O, r))$, l'application $g_{(r)} : \overline{B}(O, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ par: $g_{(r)}(x) = r \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$.
- Montrer qu'il existe $u_{(r)} \in S(O, r)$ tel que l'on ait:

$$(f(u_{(r)}) | u_{(r)}) = (y | u_{(r)}) - r \|y - f(u_{(r)})\|.$$
 - Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Fin de l'énoncé.