



1/ Présentation du sujet

Le sujet est constitué d'un seul problème qui a pour fil conducteur le calcul approché d'intégrales.

Dans une première partie, on estime l'intégrale de Gauss en permutant « limite et intégrale » avec convergence uniforme, puis convergence dominée.

La suite du problème, découpée en trois parties, étudie les méthodes de quadrature pour approximer une intégrale :

- on établit une erreur de l'approximation par interpolation de Lagrange et on met en évidence une problématique de type « phénomène de Runge »,
- on étudie la famille orthogonale des polynômes de Legendre, en montrant notamment qu'ils sont scindés,
- on introduit la notion de quadrature en lien avec l'interpolation, puis on propose le raffinement dit de Gauss en utilisant comme points d'interpolation les racines des polynômes de Legendre.

Le sujet comporte quatre questions portant sur le programme « d'informatique pour tous ». Les notions abordées sont variées :

- séries entières : développement de $\exp$, de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, lien entre coefficients et dérivées successives,
- permutation « limite intégrale » par convergence uniforme et par convergence dominée,
- théorème spécial des séries alternées avec domination du reste de rang n ,
- existence et unicité du polynôme interpolateur de Lagrange,
- analyse réelle : théorème de Rolle, théorème des bornes atteintes, théorème des valeurs intermédiaires,
- espaces euclidiens : algorithme de Gram-Schmidt...
- algorithmique avec Python : fonction factorielle par récursivité, programmation d'un test d'arrêt, de l'évaluation des polynômes interpolateurs de Lagrange, complexité du pivot de Gauss.

2/ Appréciation générale

Le texte de l'épreuve est clair, de difficulté et de longueur raisonnables. Certains candidats ont traité toutes les questions.

La partie algorithmique a plutôt été bien traitée, hormis la complexité du pivot de Gauss très souvent fausse.

La moyenne de l'épreuve est de 10,27 avec un écart-type de 4,60. Ce sujet a donc rempli son rôle de sélection des candidats.

On regrette toutefois trop de copies mal rédigées ou mal écrites. Elles sont parfois difficiles à déchiffrer pour le correcteur, ce qui pénalise bien sûr le candidat.

On conseille fortement aux futurs candidats de mettre en évidence les résultats : souligner ou encadrer les résultats rend la copie bien plus lisible.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base,
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur,
- le soin apporté à la présentation de son travail (souligner ou encadrer les résultats).

Un candidat de niveau moyen et ayant travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

3/ Erreurs courantes et remarques détaillées

Partie I - Permutation limite intégrale et intégrale de Gauss

- Q1.** On pouvait utiliser des arguments de convergence normale en remarquant, par exemple, que le DSE de $\exp$ est de rayon infini. Certains ont utilisé le théorème d'intégration terme à terme, où l'on montre la convergence de la série de terme général, l'intégrale de la valeur absolue de f_n .
- Q2.** Attention pour une série alternée $\sum (-1)^n a_n$, la domination du reste de rang n par a_{n+1} est valable lorsque (a_n) est une suite décroissante qui tend vers 0. Certains ne mentionnent pas cette hypothèse.
- Q3.** Certains n'ont pas vu qu'il fallait écrire une fonction récursive.
- Q4.** Quelques erreurs de logique sur l'inégalité constituant la condition d'arrêt. Certains ont aussi été gênés par le mot « script » qu'ils ont confondu avec « pseudo-code ».
- Q5.** Attention, certains candidats composent leurs équivalents par $\exp$, ce qui est une erreur de raisonnement. On rappelle, par exemple, qu'au voisinage de $+\infty$, n est équivalent à $n + 1$, mais e^n n'est pas équivalent à e^{n+1} .
- Q6.** La majoration n'est pas toujours réussie (certains prouvent seulement des inégalités locales avec des développements limités). Pour la permutation limite intégrale, certains invoquent à tort une convergence uniforme. On utilisait ici le théorème de convergence dominée, dont les hypothèses ne sont pas toujours connues.

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

- Q7.** Réussie en général.
- Q8.** Globalement bien traitée, soit en utilisant une fonction auxiliaire pour le calcul de l_i , soit en imbriquant deux boucles. On note parfois une erreur dans l'initialisation à 0 au lieu de 1 de la variable pour le calcul itératif d'un produit.

- Q9.** La matrice de Vandermonde est souvent trouvée, mais la complexité du pivot de Gauss en $O(n^3)$ a rarement été donnée.
- Q10.** La plupart des candidats pensent au théorème de Rolle, mais les preuves ne sont pas toujours claires.
- Q11.** Bien réussie.
- Q12.** Bien réussie.
- Q13.** La première partie de la question est bien traitée. La seconde partie est souvent confuse : la nullité de la dérivée $(n + 1)$ -ième de $L_n(f)$ et le calcul de la dérivée $(n + 1)$ -ième de π_n ne sont pas toujours évoqués.
- Q14.** Le théorème des bornes atteintes est connu. Le choix de K est souvent confus, parfois dépendant de n .
- Q15.** Bien réussie dans l'ensemble.
- Q16.** Question très peu réussie qui demandait de connaître le lien entre coefficient et dérivée successive d'une fonction développable en série entière.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

- Q17.** Finalement peu de bonnes réponses à l'application de Gram-Schmidt.
- Q18.** La justification du fait que P_n est de degré n est souvent incomplète ou fausse.
- Q19.** La continuité de P_n ou le théorème des valeurs intermédiaire ne sont pas toujours évoqués.
- Q20.** Des réponses pas toujours très claires. Le signe constant de H n'est pas toujours évoqué.

Partie IV - Méthodes de quadrature

- Q21.** Bien réussie.
- Q22.** Bien réussie lorsqu'elle a été traitée.
- Q23.** Les erreurs de calcul pour α_0 et α_1 sont fréquentes. La méthode des trapèzes est parfois citée, mais le lien avec α_0 et α_1 est souvent confus.
- Q24.** La première partie de la question a souvent été admise pour en déduire la deuxième.
- Q25.** Question très peu réussie.