

# CONCOURS COMMUN CINP 2024

## CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1 - FILIÈRE MP

m.laamoum2@gmail.com<sup>1</sup>

### EXERCICE I

$X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  d'espérance finie

**Q1.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- On a  $[X > k - 1] = [X > k] \cup [X = k]$  et  $[X > k] \cap [X = k] = \emptyset$ , donc

$$\mathbb{P}(X > k - 1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$$

par suite  $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X > k - 1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X > k) \end{aligned}$$

dans la première somme on change  $k$  en  $k - 1$  et dans la deuxième on rajoute le terme  $k = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n \mathbb{P}(X > n) \end{aligned}$$

- Montrons que  $n \mathbb{P}(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On a  $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$  donc

$$0 \leq n \mathbb{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k)$$

$X$  admet une espérance donc la série  $\sum n \mathbb{P}(X = n)$  converge par suite le reste  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k)$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

Par comparaison on a  $n \mathbb{P}(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi la série  $\sum \mathbb{P}(X > n)$  converge et par passage à la limite on a

---

<sup>1</sup><https://tinyurl.com/2qyzrrbd>

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

**Q2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

- Posons pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $Y_i$  la variable aléatoire qui donne le résultat du  $i$  eme tirage .

On a alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$[X \leq k] = \bigcap_{i=1}^p [Y_i \leq k]$$

le tirage est avec remise donc les  $Y_i$  sont mutuellement indépendantes , ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^p \mathbb{P}(Y_i \leq k)$$

les  $Y_i$  suivent la loi uniforme  $\mathcal{U}([1, n])$  donc  $\mathbb{P}(Y_i \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y_i = j) = \frac{k}{n}$  , d'où

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

- Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$  donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$$

**Q3.**

- Remarquons que  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$  est la somme de Riemann d'ordre  $n$  de la fonction  $x \mapsto x^p$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \quad (1)$$

- La question **Q1** donne  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X > k)$  et on a  $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p$  , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \end{aligned}$$

de la relation (1) on a  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{p+1}$  , d'où  $\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{pn}{p+1}$ .

## EXERCICE II

On considère, sur  $I = ]0, +\infty[$ , les équations différentielles:

$$(E) : \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H) : \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

**Q4.** Sur  $I$  l'équation  $(H)$  s'écrit :  $y'' = \frac{-4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y$ , c'est une équation homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients définis et continus sur  $I$ , donc  $\mathcal{S}_I(H)$  est  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension 2.

**Q5.** Soit  $f$  une solution de  $(E)$  développable en série entière, écrivons  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ , donc on a pour  $x \in ]-R, R[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

par suite

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n, \quad 4x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n n x^n$$

et

$$(2-x^2)f(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}$$

dans la deuxième somme on change  $n+2$  en  $n$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} (2-x^2)f(x) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ &= 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (2a_n - a_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2-x^2)f(x) &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n(n-1) + 4n + 2) - a_{n-2}] x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2}] x^n \end{aligned}$$

$f$  une solution de  $(E)$ , donc

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad 2a_0 - 1 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2}] x^n = 0$$

par suite

$$\begin{cases} 2a_0 - 1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2} = 0, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

- Si  $n = 2p+1$  alors  $a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{(2p+2)(2p+2)}$ , comme  $a_1 = 0$  alors  $a_{2p+1} = 0$  pour tout  $p \geq 1$ .
- Si  $n = 2p$  alors  $a_{2p} = \frac{a_{2(p-1)}}{(2p+1)(2p+2)}$  pour tout  $p \geq 1$ , ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \frac{1}{(2p)(2p-1)} \cdots \frac{1}{4 \cdot 3} \frac{1}{2} = \frac{1}{(2p+2)!}.$$

Ainsi  $\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p}}$ . Ce qui donne  $R = +\infty$  par suite  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ .

Pour tout  $x \in I$  on a  $f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p}$ , or  $\text{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p}$  donc

$$\boxed{f(x) = \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2}}.$$

**Q6.** On note pour  $x \in I$ ,  $g(x) = \frac{-1}{x^2}$  et  $h(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$ . On admet que  $g \in \mathcal{S}_I(E)$  et  $h \in \mathcal{S}_I(H)$ .

Une solution de  $(E)$  est la somme d'une solution particulière de  $(E)$  et d'une solution de  $(H)$ .

Une autre solution de  $(H)$  est donnée par  $q = f - g$ , donc  $q(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2}$ .

Le Wronskien de la famille  $(q, h)$  est donné par

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} q(x) & h(x) \\ q'(x) & h'(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cosh(x)}{x^2} \left( -\frac{2 \sinh(x)}{x^3} + \frac{\cosh(x)}{x^2} \right) - \frac{\sinh(x)}{x^2} \left( -\frac{2 \cosh(x)}{x^3} + \frac{\sinh(x)}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$W(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$  ce qui assure que  $(q, h)$  est un système fondamental de solutions de  $(H)$  donc  $\mathcal{S}_I(H) = \text{vect}(q, h)$ .

Ainsi  $\boxed{\mathcal{S}_I(E) = \{y = g + \alpha q + \beta h, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}}$ .

**Q7.** Soit  $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ .

- La restriction  $y|_I$ , de  $y$  sur  $I$ , est une solution de  $(H)$  sur  $I$ , donc il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $y|_I = \alpha q + \beta h$ , ainsi pour tout  $x \in I (= ]0, +\infty[)$

$$y|_I(x) = y(x) = \alpha \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + \beta \frac{\text{sh}(x)}{x^2} \quad (*)$$

$y$  est dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$  donc elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  en particulier en 0, au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + \beta \frac{\text{sh}(x)}{x^2} &= \frac{\alpha(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) + \beta(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^2} \\ &= \frac{\alpha + \beta x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} \end{aligned}$$

qui n'admet de limite en 0 que si  $\alpha = \beta = 0$  d'où  $y = 0$ .

- La restriction  $y|_{(-I)}$ , de  $y$  sur  $]-\infty, 0[$  donne une solution  $z$  de  $(H)$   $I$  par  $z(x) = y|_{(-I)}(-x) = y(-x)$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ . Donc  $y|_{(-I)}$  admet une expression de la forme  $(*)$ , par le même raisonnement on trouve  $y|_{(-I)} = 0$ . Donc  $y = 0$  sur  $\mathbb{R}$  par suite  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0\}$ .

La dimension de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$  est zéro et pas 2 car on ne peut pas écrire l'équation  $(H)$  sous la forme  $y'' = a(x)y' + b(x)y$  avec  $a$  et  $b$  des fonctions définies et continues sur  $\mathbb{R}$ .

# PROBLEME

**Q8.** On écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

donc

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ainsi  $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$

## Partie I

**Q9.** On a  $((\sin(x))^{n+1})' = (n+1) \cos(x) (\sin(x))^n$ , par une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))' (\sin(x))^{n+1} dx \\ &= \left[ -\cos(x) (\sin(x))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) (\sin(x))^n dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) (\sin(x))^n dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

On a donc  $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}.$

Par suite  $(2n+1)W_{2n+1} = (2n)W_{2n-1}$  ce qui donne

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} W_1$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = 1 \text{ donc}$$

$$\boxed{W_{2n+1} = \frac{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

**Q10.**

- Soit  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n$$

avec

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
 &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots (2n-1)}{n!} \\
 &= (-1)^n \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)n!} \\
 &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}
 \end{aligned}$$

ainsi on a  $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}}.$

- Par intégration entre 0 et  $x$  on obtient  $\boxed{\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, \forall x \in ]-1, 1[}$

**Q11.** Soit  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\sin(x) \in [0, 1[$  la question précédente donne

$$x = \text{Arcsin}(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}.$$

**Q12.** Utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque qui permet l'interversion des symboles  $\sum$  et  $\int$ .

Posons pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue intégrable et positive sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vers une fonction continue.
- $\int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| dx = W_{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$ , or  $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$  donc  $\int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

par suite la série  $\sum \int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| dx$  converge.

Ainsi par le théorème d'intégration des séries de fonctions on a

$$\int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f_n(x) dx \right)$$

d'où l'on a  $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} dx.}$

**Q13.** Les questions **Q11.** et **Q12.** donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1}.$$

donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  et d'après **Q8.** on a  $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$

## Partie II

**Q14.**

- Pour tout  $x \in ]-1, 1[$  on a  $\frac{1}{x^2 - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}$ .
- Soit  $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ .

La relation précédente donne pour tout  $x \in ]0, 1[$   $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}$ . Posons  $f_n(x) = -\ln(x)x^{2n}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue et positive sur  $]0, 1[$ . On a  $\sqrt{x} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , par la règle de Riemann  $f_n$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et sur  $]0, 1[$ .
- Soit  $x \in ]0, 1[$ , on a

$$\int_x^1 \ln(t)t^{2n}dt = \left[ \ln(t) \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}dt = -\ln(x) \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

par suite

$$\int_{]0,1[} |f_n(t)| dt = \int_{]0,1[} |f_n(t)| dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 -\ln(t)t^{2n}dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc la série  $\sum \int_{]0,1[} |f_n(t)| dt$  converge.

Le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque donne

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} f_n(t)dt$$

donc  $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}.$

**Q15.** On pose pour  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$ .

Soit pour  $(x, t) \in ([0, +\infty])^2$ ,  $g(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ .

- Pour tout  $(x, t) \in ([0, +\infty])^2$  on a  $\left| \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}$ , la fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  donc la fonction  $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

Donc  $f$  est bien définie sur  $[0, +\infty[$ .

- On a  $g$  est continue sur  $([0, +\infty])^2$  et  $|g(x, t)| \leq \varphi(t)$  pour tout  $(x, t) \in ([0, +\infty])^2$ , avec  $\varphi$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Q16.** On a  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $([0, +\infty])^2$  et  $\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ .

Soit  $[a, b] \subset ]0, 1[$ . Si  $(x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[$  alors  $\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{2}{\pi} \varphi(t)$ , qui est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Ce qui prouve que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  et  $\boxed{f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt}$ .

**Q17.** On vérifie facilement que  $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{(1-x^2)t}{(t^2x^2+1)(t^2+1)}$ .

De la question précédente on a pour tout  $x \in ]0, 1[$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)} \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right) dt$$

Les deux fonctions sous le signe intégral ne sont pas intégrables sur  $[0, +\infty[$  , prenons un  $A > 0$  alors

$$\int_0^A \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+A^2}{1+A^2 x^2} \right)$$

ce qui donne par passage à la limite

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt = -\ln(x)$$

On en déduit que pour tout  $x \in ]0, 1[$  ,  $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ .

**Q18.**

- On a

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = \left[ \frac{1}{2} \text{Arctan}^2(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1]$  et pour tout  $x \in ]0, 1[$  ,  $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$  donc  $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt$  , la continuité en 1 donne  $f(1) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt$  .

- La question **Q14.** donne  $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  , d'après la question **Q14.** on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  .