

CONCOURS COMMUN CINP 2024

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1 - FILIÈRE MP

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE I

X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} d'espérance finie

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On a $[X > k - 1] = [X > k] \cup [X = k]$ et $[X > k] \cap [X = k] = \emptyset$, donc

$$\mathbb{P}(X > k - 1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$$

par suite $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(\mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k - 1) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k) \end{aligned}$$

dans la première somme on change k en $k - 1$ et dans la deuxième on rajoute le terme $k = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \end{aligned}$$

- Montrons que $n\mathbb{P}(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ donc

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

X admet une espérance donc la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge par suite le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Par comparaison on a $n\mathbb{P}(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge et par passage à la limite on a

¹<https://tinyurl.com/2qyzzrbd>

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Posons pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, Y_i la variable aléatoire qui donne le résultat du i eme tirage .

On a alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$[X \leq k] = \bigcap_{i=1}^p [Y_i \leq k]$$

le tirage est avec remise donc les Y_i sont mutuellement indépendantes , ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^p \mathbb{P}(Y_i \leq k)$$

les Y_i suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([1, n])$ donc $\mathbb{P}(Y_i \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y_i = j) = \frac{k}{n}$, d'où

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

- Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$ donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$$

Q3.

- Remarquons que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$ est la somme de Riemann d'ordre n de la fonction $x \mapsto x^p$ sur l'intervalle $[0, 1]$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \quad (1)$$

- La question **Q1** donne $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X > k)$ et on a $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \end{aligned}$$

de la relation (1) on a $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{p+1}$, d'où $\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{pn}{p+1}}.$

EXERCICE II

On considère, sur $I =]0, +\infty[$, les équations différentielles:

$$(E) : \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H) : \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

Q4. Sur I l'équation (H) s'écrit : $y'' = \frac{-4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y$, c'est une équation homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients définis et continus sur I , donc $\mathcal{S}_I(H)$ est \mathbb{R} espace vectoriel de dimension 2.

Q5. Soit f une solution de (E) développable en série entière, écrivons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, donc on a pour $x \in]-R, R[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

par suite

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n, 4x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n n x^n$$

et

$$(2 - x^2)f(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}$$

dans la deuxième somme on change $n+2$ en n , ce qui donne

$$\begin{aligned} (2 - x^2)f(x) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ &= 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (2a_n - a_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2)f(x) &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n(n-1) + 4n + 2) - a_{n-2}] x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2}] x^n \end{aligned}$$

f une solution de (E) , donc

$$\forall x \in]-R, R[, 2a_0 - 1 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2}] x^n = 0$$

par suite

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_0 - 1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2} = 0, \forall n \geq 2 \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \forall n \geq 2 \end{array} \right.$$

• Si $n = 2p + 1$ alors $a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{(2p+2)(2p+2)}$, comme $a_1 = 0$ alors $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 1$.

• Si $n = 2p$ alors $a_{2p} = \frac{a_{2(p-1)}}{(2p+1)(2p+2)}$ pour tout $p \geq 1$, ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \frac{1}{(2p)(2p-1)} \cdots \frac{1}{4 \cdot 3} \frac{1}{2} = \frac{1}{(2p+2)!}.$$

Ainsi $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p}$. Ce qui donne $R = +\infty$ par suite f est solution de (E) sur I .

Pour tout $x \in I$ on a $f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p}$, or $\text{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p}$ donc

$$f(x) = \frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2}.$$

Q6. On note pour $x \in I$, $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$. On admet que $g \in \mathcal{S}_I(E)$ et $h \in \mathcal{S}_I(H)$.

Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (H) .

Une autre solution de (H) est donnée par $q = f - g$, donc $q(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2}$.

Le Wronskien de la famille (q, h) est donné par

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} q(x) & h(x) \\ q'(x) & h'(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cosh(x)}{x^2} \left(-\frac{2 \sinh(x)}{x^3} + \frac{\cosh(x)}{x^2} \right) - \frac{\sinh(x)}{x^2} \left(-\frac{2 \cosh(x)}{x^3} + \frac{\sinh(x)}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ ce qui assure que (q, h) est un système fondamental de solutions de (H) donc $\mathcal{S}_I(H) = \text{vect}(q, h)$.

Ainsi $\mathcal{S}_I(E) = \{y = g + \alpha q + \beta h, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Q7. Soit $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$.

- La restriction $y|_I$, de y sur I , est une solution de (H) sur I , donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y|_I = \alpha q + \beta h$, ainsi pour tout $x \in I$ ($=]0, +\infty[$)

$$y|_I(x) = y(x) = \alpha \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + \beta \frac{\text{sh}(x)}{x^2} \quad (*)$$

y est dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ donc elle est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} en particulier en 0, au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\text{ch}(x)}{x^2} + \beta \frac{\text{sh}(x)}{x^2} &= \frac{\alpha(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) + \beta(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^2} \\ &= \frac{\alpha + \beta x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} \end{aligned}$$

qui n'admet de limite en 0 que si $\alpha = \beta = 0$ d'où $y = 0$.

- La restriction $y|_{(-I)}$, de y sur $]-\infty, 0[$ donne une solution z de (H) sur I par $z(x) = y|_{(-I)}(-x) = y(-x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$. Donc $y|_{(-I)}$ admet une expression de la forme $(*)$, par le même raisonnement on trouve $y|_{(-I)} = 0$. Donc $y = 0$ sur \mathbb{R} par suite $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0\}$.

La dimension de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est zéro et pas 2 car on ne peut pas écrire l'équation (H) sous la forme $y'' = a(x)y' + b(x)y$ avec a et b des fonctions définies et continues sur \mathbb{R} .

PROBLEME

Q8. On écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

donc

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ainsi $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$

Partie I

Q9. On a $((\sin(x))^{n+1})' = (n+1) \cos(x) (\sin(x))^n$, par une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))' (\sin(x))^{n+1} dx \\ &= \left[-\cos(x) (\sin(x))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) (\sin(x))^n dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) (\sin(x))^n dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$.

Par suite $(2n+1)W_{2n+1} = (2n)W_{2n-1}$ ce qui donne

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} W_1$$

$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = 1$ donc

$$\boxed{W_{2n+1} = \frac{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

Q10.

- Soit $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n$$

avec

$$\begin{aligned}
 \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
 &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n!} \\
 &= (-1)^n \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \dots \times 2n)n!} \\
 &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}
 \end{aligned}$$

ainsi on a $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}}.$

- Par intégration entre 0 et x on obtient $\boxed{\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, \forall x \in]-1, 1[}$

Q11. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) \in [0, 1[$ la question précédente donne

$$x = \text{Arcsin}(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}.$$

Q12. Utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque qui permet l'interversions des symboles \sum et \int .

Posons pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue intégrable et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Le série $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers une fonction continue.
- $\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| dx = W_{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$, or $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ donc $\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

par suite la série $\sum \int_{[0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| dx$ converge .

Ainsi par le théorème d'intégration des séries de fonctions on a

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} f_n(x) dx \right)$$

d'où l'on a $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} dx}.$

Q13. Les questions **Q11.** et **Q12.** donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1}.$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et d'après **Q8.** on a $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$

Partie II

Q14.

- Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $\frac{1}{x^2 - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}$.
- Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ pour tout $x \in]0, 1[$.

La relation précédente donne pour tout $x \in]0, 1[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}$. Posons $f_n(x) = -\ln(x)x^{2n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et positive sur $]0, 1[$. On a $\sqrt{x} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, par la règle de Riemann f_n est intégrable sur $]0, 1[$ et sur $]0, 1[$.

- Soit $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \ln(t)t^{2n} dt = \left[\ln(t) \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = -\ln(x) \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

par suite

$$\int_{]0,1[} |f_n(t)| dt = \int_{]0,1]} |f_n(t)| dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 -\ln(t)t^{2n} dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc la série $\sum \int_{]0,1[} |f_n(t)| dt$ converge.

Le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque donne

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} f_n(t) dt$$

doù $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$.

Q15. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$.

Soit pour $(x, t) \in ([0, +\infty[)^2$, $g(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$.

- Pour tout $(x, t) \in ([0, +\infty[)^2$ on a $\left| \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Donc f est bien définie sur $[0, +\infty[$.

- On a g est continue sur $([0, +\infty[)^2$ et $|g(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in ([0, +\infty[)^2$, avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc f est continue sur $[0, +\infty[$.

Q16. On a g est de classe \mathcal{C}^1 sur $([0, +\infty[)^2$ et $\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

Soit $[a, b] \subset]0, 1]$. Si $(x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[$ alors $\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{2}{\pi} \varphi(t)$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ce qui prouve que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$ et $\boxed{f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt}$.

Q17. On vérifie facilement que $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{(1-x^2)t}{(t^2x^2+1)(t^2+1)}$.

De la question précédente on a pour tout $x \in]0, 1[$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right) dt$$

Les deux fonctions sous le signe intégral ne sont pas intégrables sur $[0, +\infty[$, prenons un $A > 0$ alors

$$\int_0^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+A^2}{1+A^2 x^2} \right)$$

ce qui donne par passage à la limite

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt = -\ln(x)$$

On en déduit que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

Q18.

- On a

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \text{Arctan}^2(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

- La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ donc $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt$, la continuité en 1 donne $f(1) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt$.
- La question Q14. donne $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, d'après la question Q14. on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.