EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES 1

par **Alain CHAURÉ, Maitre de Conférences**
à l'Université de Reims

L'épreuve de Mathématiques 1 de la session 2005 propose d'étudier le calcul de l'exponentielle d'une matrice par la méthode de PUTZER.

La première partie établit deux résultats importants qui seront utilisés dans la suite du problème : le premier est la formule $A \times ({}^t\mathrm{Com}\, A) = ({}^t\mathrm{Com}\, A) \times A = (\det A) I_n$, valable pour toute matrice carrée A complexe et le second est le théorème de Cayley-Hamilton, affirmant que le polynôme caractéristique de toute matrice carrée A complexe est annulateur pour A. Ces deux résultats, connus de certains candidats, sont néanmoins hors programme de la filière PC et nécessitent donc d'être démontrés en vue de leur utilisation ultérieure.

La deuxième partie définit l'exponentielle d'une matrice (méthode de PUTZER) comme solution d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle matricielle linéaire du premier ordre.

La troisième partie établit quelques propriétés classiques de l'exponentielle de matrice, en particulier la formule $e^A e^B = e^{A+B}$ lorsque A et B commutent.

Enfin la quatrième et dernière partie permet de résoudre dans $\mathbb{R}^3$ un problème de Cauchy du type $x' = u \wedge x$, $x(0) = x_0$ que l'on rencontre en mécanique du solide et en électromagnétisme.

De l'avis général et presque unanime des correcteurs, ce sujet ne comporte pas de grandes difficultés, mais est sans doute un peu trop long pour de nombreux candidats qui n'abordent pas la partie **IV**. La présentation des copies est « globalement satisfaisante », les inévitables brouillons étant pour la plupart des copies très faibles, mais le contenu des copies est de qualité très variable, la rédaction d'une solution ainsi que l'argumentation sont trop souvent approximatives. Parmi les principales insuffisances, notons :

- la confusion entre cofacteur et mineur.
- la méconnaissance du développement d'un déterminant suivant les éléments d'une rangée.
- l'impasse trop souvent faite sur les applications numériques aux questions **II.3** et **III.3** alors que ces deux questions pouvaient rapporter dix points sur un total de quatre-vingt trois.
- le manque de compréhension du problème posé lorsque l'on voit apparaitre à l'occasion des questions de la partie **III** des développements en série de e^A sans aucune justification ou bien lorsque la matrice e^A a pour terme général $e^{a_{ij}}$ si a_{ij} est le terme général de A.

Remarques plus précises concernant chacune des questions du problème

Partie I

I.1.a – La méthode de Sarrus est trop systématiquement employée au détriment du développement suivant la deuxième colonne.

I.1.b – Mauvaise foi de certains candidats : $ComM$ est fausse, mais le produit $M \times ({}^t\mathrm{Com}\, M)$ est miraculeusement correct. Une assez grande proportion de candidats s'est contentée de donner la formule $M \times ({}^t\mathrm{Com}\, M) = (\det M) I_n$ qui est hors programme. Les candidats qui ont lu l'ensemble de l'énoncé avant de commencer ont pu s'apercevoir que la justification de cette formule était demandée plus loin.

I.1.c – Le résultat est trop souvent donné sous forme développée comme conséquence de la règle de Sarrus.

I.1.d – $(I_3 + M)(2I_3 - M)$ est parfois fausse avec $\chi_M(M)$ correcte, le théorème de Cayley-Hamilton hors programme étant invoqué.

I.2.a – La confusion cofacteur mineur n'a pas empêché certains candidats de trouver le résultat demandé.

I.2.b,c – L'argument précis d'égalité des lignes ou des colonnes pour justifier que le déterminant est nul n'est avancé que dans une copie sur deux.

I.2.d – Beaucoup trop de formules incohérentes sur le terme général d'une matrice produit.

I.3.a – Récurrence en général mal rédigée : initialisation décalée et (ou) erreur dans la formule de développement.

I.3.b – Beaucoup d'erreurs de raisonnement basées sur $\mathbb{C}[X]$ en oubliant la nature matricielle des coefficients de la combinaison linéaire.

I.4.a,b,c – On voit sur ces questions que les candidats ne maitrisent pas suffisamment le calcul matriciel : ils commutent allègrement ou inversent sans se soucier de l'inversibilité. Très peu de candidats ont correctement traité ces questions.

Partie II

II.1.a – Trop fréquemment, on rencontre l'erreur $A\prod_{j=1}^{k-1}(A-\lambda_j I_n) = \prod_{j=1}^{k-1} A(A-\lambda_j I_n)$.

II.1.b – Beaucoup de raisonnements très vagues et très imprécis du genre : on a les n valeurs propres, donc c'est un polynôme annulateur. Le lien avec **I.4.c** n'a pas toujours été vu.

II.2.a – Beaucoup d'escroqueries intellectuelles dans cette question pour aboutir à l'expression demandée. Il y a ceux qui partent de $E'_A = AE_A$ et ceux qui dérivent C_k en C_{k+1} ou $C_k + C_{k+1}$.

II.2.b – Bien que cette question ait presque toujours été abordée, un candidat sur deux n'a pas vu le problème lié à la non commutativité (à priori).

II.2.c,d – Beaucoup d'erreurs de dérivation dans ces questions.

II.2.e – Un bon nombre de candidats n'ont pas vu qu'il convenait de traiter cette question sur le modèle de **II.2.d** en introduisant une fonction auxiliaire.

II.3. – Question évitée par beaucoup de candidats. Le sentiment des correcteurs face à cette attitude est que soit les candidats ne parviennent pas à résoudre le système différentiel, soit ils ne comprennent pas l'algorithme proposé. Très rares sont les candidats ayant conduit les calculs à leur terme.

II.4. – Les candidats montrent ici, s'ils sont dépassés ou non par le sujet : il y a ceux qui intègrent l'équation en ke^{sA} par analogie avec $\mathbb{R}$ et ceux qui écrivent $Z_0 e^{sA}$.

Partie III

III.1 – Nombre de candidats ont utilisé le développement en série de e^{sA} (malgré l'indication donnée dès la seconde ligne du sujet) pour justifier qu'il s'agissait d'un polynôme en A !

III.2.a,b,c – Ces questions faciles ont souvent donné lieu à des démonstrations lourdes et quelquefois fausses.

III.3 – Même remarque qu'en **II.3**

III.4.a,b – Question assez peu abordée. Souvent les candidats qui l'ont traitée ont cherché à utiliser **III.1** sans justifier clairement que les y_k associés aux matrices A, $P^{-1}AP$ et ${}^tA$ sont les mêmes, alors que les matrices C_k sont transformées.

Partie IV

IV.1 et **2 –** Souvent traitées par des candidats à la recherche de points faciles.

IV.3 et **4 –** Rarement abordées, mais avec succès par les candidats concernés.