

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1

I.— Remarques générales sur l'épreuve.

1.— Présentation du sujet.

Le sujet se proposait d'étudier les propriétés d'un faisceau de matrices carrées de la forme $A - \lambda B$ et d'analyser la diagonalisabilité du couple (A, B) dans un sens spécial. De façon générale, cette problématique a été étudiée à partir de la fin du XIXe siècle, notamment par Weierstrass et Kronecker et offre une alternative à la réduction de Jordan.

L'ambition du sujet était, de façon plus modeste, d'introduire les notations nécessaires à l'étude de plusieurs cas simples (ordres 3 et 4 et matrices symétriques d'ordre n) et une condition suffisante de diagonalisabilité.

Le parti-pris a été d'introduire un grand nombre de notations au fur et à mesure de la progression dans le sujet. En revanche, les questions étaient très guidées et largement indépendantes les unes des autres. Chaque partie débutait par des questions particulièrement simples et progressait très raisonnablement en difficulté.

La **partie I** étudiait la problématique sur un couple de matrices (A, B) d'ordre 3. Les vecteurs propres intervenant dans les calculs étaient explicités dès le début de la partie si bien que la réussite de cette partie ne devait pas être entravée par d'éventuelles erreurs de calcul. L'ensemble des questions de cette partie avait été conçu pour pouvoir être réalisé raisonnablement en une trentaine de minutes.

La **partie II** s'articulait essentiellement autour des propriétés de $\det(A - \lambda B)$. Le résultat le plus délicat consistait à démontrer le fait que cela définissait un polynôme de degré inférieur à n . Les résultats étant largement explicités, toutes les questions pouvaient être abordées indépendamment les unes des autres.

La **partie III** commençait par un ensemble de questions classiques autour de la notion de matrice symétrique définie-positive et de produit scalaire associé. Un changement d'inconnues permettait de déduire la diagonalisabilité de (A, B) essentiellement à partir du théorème spectral.

La **partie IV** était le cœur de l'étude et permettait, sous des hypothèses simplifiant les notations, d'aborder partiellement l'étude d'une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de (A, B) . Dans cette partie, la généralité du problème avait été largement sacrifiée afin de pouvoir être traitée assez rapidement tout en abordant le fond du problème (rajout du point à l'infini dans la condition d'égalité des multiplicités algébriques et géométriques). Pour ne pas alourdir cette partie, il avait été choisi de laisser plus d'autonomie au candidat, notamment pour la distinction de différents cas.

La **partie V** revenait à un calcul de déterminant explicite sur des matrices de type "circulante" et l'utilisation cohérente de quelques résultats de parties précédentes pouvait être admise. Du même niveau de facilité que la partie I, cette dernière partie pouvait et devait être réussie rapidement par tout candidat ayant lu le sujet dans son ensemble et ayant bien géré son temps.

On rappelle ici qu'aucune sorte de pénalité ne peut être infligée à un candidat qui aurait abordé la partie V avant d'autres parties.

Le sujet, dans son ensemble, se donnait pour but d'évaluer chez les candidats la connaissance du cours, la qualité du raisonnement ainsi que l'efficacité. La longueur relative du sujet était justement un point important d'évaluation de l'efficacité des candidats. Aucune question à elle seule ne nécessitait un raisonnement combinant plusieurs idées fines et originales.

2.— Problèmes constatés par les correcteurs.

Les correcteurs de cette épreuve ont constaté d'une part que le soin et la présentation globale des copies étaient encore très bons cette année (des points sont attribués spécialement pour cela) et d'autre part que les copies très faibles (en-dessous de 3 sur 20) étaient notablement moins nombreuses si bien que les moyennes générales ont progressé par rapport à l'année précédente.

En revanche, beaucoup de correcteurs soulignent que la qualité de raisonnement et de rédaction (des points sont attribués spécialement pour cela aussi) a régressé par rapport aux années précédentes. Pour l'efficacité, on constate que trop de candidats choisissent les méthodes de calcul et les raisonnements les plus longs, perdant ainsi un précieux temps. Tout au contraire, une petite minorité de candidats calcule, raisonne et rédige de façon juste, concise et synthétique, qualités toujours très appréciées des correcteurs. De plus, la longueur de l'épreuve s'est avérée correcte étant donné qu'environ 10 % des candidats ont traité presque intégralement le sujet.

La partie I a été très bien réussie par tous mais elle a dû prendre trop de temps à certains candidats. La partie II a été abordée quasiment par tous avec un résultat effectif très variable. Le début de la partie III a lui aussi été abordé par tous, mais le taux de réussite de ces questions très classiques s'est avéré globalement assez désastreux. La fin de la partie III et l'ensemble de la partie IV ont été moins abordés, souvent de façon partielle. La partie V a été largement traitée mais toujours validée au mieux à cause de la gestion du temps.

Un candidat ayant traité correctement les parties I et V s'assurait d'une note supérieure à 6 sur 20.

II.— Remarques détaillées sur chaque question de l'épreuve.

Partie I.

I.1.a. Toujours réussie mais souvent par un calcul de déterminant alors qu'on pouvait constater plus rapidement que la famille des lignes (ou des colonnes) de la matrice était liée.

I.1.b. Bien traitée par le déterminant. Certains justifient l'inversibilité par le calcul de l'inverse.

I.1.c. Plus des deux tiers ont calculé A^{-1} . Certains la calculent en résolvant un système 9 x 9 !

I.2.a et b. Sans problème.

I.2.c. Plus de la moitié des candidats prennent deux vecteurs "au hasard" dans $E_{1/2}(A, B)$ sans justifier que cela constitue une famille génératrice, puis affirment (pour avoir la dimension) qu'il s'agit d'une base sans parler de liberté. La question s'est avérée très discriminante.

I.3.a. Sans problème.

I.3.b. On retrouve les mêmes problèmes qu'en I.2.c. pour ceux qui ne constatent pas que ce sont les mêmes équations qui interviennent. À signaler que quelques candidats sont persuadés qu'une famille génératrice est toujours unique et en déduisent une erreur d'énoncé s'ils ne trouvent pas la famille $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ génératrice de $E_2(B, A)$.

I.3.c. Question très simple et très courte mais parfois traitée longuement.

I.4.a. Souvent bien des calculs inutiles et coûteux en temps pour réussir cette question. Certains vont jusqu'à calculer le polynôme caractéristique de C !

I.4.b. Beaucoup de candidats confondent les arguments pour justifier que C est diagonalisable et le fait de trouver effectivement une matrice R telle que $C = RDR^{-1}$ avec D prescrite. Ainsi, bien peu de candidats parlent de bases et de formule de changement de bases. Oubliant la question précédente, ils refont alors tous les calculs qui leur semblent nécessaires pour montrer que C n'a que deux valeurs propres et que la multiplicité de ces deux valeurs propres vaut la dimension des sous-espaces propres correspondants.

I.4.c. Sans problème.

I.4.d. Plutôt moyennement réussie car beaucoup sont partis sur le fait que A était équivalente à I_3 , ce qui ne permettait pas de relier B à D avec les mêmes matrices P et Q .

Partie II.

II.1.a. L'égalité a été souvent trouvée (parfois au mépris des propriétés du déterminant) mais la conclusion sur le degré a posé problème.

II.1.b. Souvent réussie excepté par ceux qui prennent des matrices A ou B qui dépendent de λ .

II.1.c. Question peu abordée bien que la démonstration eût pu se faire sur le même modèle que celle du cours sur le polynôme caractéristique. Beaucoup de points étaient prévus pour cette question et le fait d'esquisser la bonne démonstration (sans faire de récurrence) rapportait au maximum la moitié des points.

II.2.a. L'implication directe se faisait sans problème et l'implication indirecte a été très souvent mal traitée. Aucun espoir de "bluffer" le correcteur sur une question pareille par un quelconque principe d'"identification" des membres d'une somme !

II.2.b. Il est souvent oublié de préciser que α est non nul. L'égalité des spectres est parfois confondue avec une simple inclusion. Il y a encore beaucoup de contradictions dans cette question.

II.3.a. Bien réussie.

II.3.b. Très mal réussie : parce que la question précédente suppose λ non nul, plus de la moitié des candidats supposent que le λ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$ est lui-même non nul. Ceux qui se rendent compte de l'éventualité d'un λ nul ont bien du mal à s'en sortir.

II.3.c. La question a été très souvent comprise mais les justifications ont été longues et peu claires. Le calcul de la multiplicité ne nécessitait pas ici les dérivées successives. La non-nullité de certains coefficients n'intervenait pas au moment précis où on en avait réellement besoin.

II.3.d. Certains candidats ici, comme dans la question III.1.c., cherchent à montrer chacune des équivalences au lieu de montrer seulement des implications "circulaires" du type $i) \implies ii) \implies iii) \implies i)$. Pour l'une des implications, quasiment tous les candidats qui l'ont traitée ont utilisé la question précédente avec $r = 0$!

II.4. Même taux de réussite que pour la question I.4.d. qui était essentiellement la même question dans un cadre plus général.

Partie III.

III.1.a. Beaucoup de correcteurs ont constaté dans cette question (et parfois aussi la suivante) à quel point le calcul matriciel sur des matrices générales pose d'énormes difficultés. On aura vu souvent :

$${}^t XM = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij} x_i \quad \text{ou} \quad {}^t XM = \sum_{i=1}^n m_{ij} x_i$$

ou encore le résultat pour ${}^t X M Y$ directement “bombardé” !

III.1.b. Quelques-uns traduisent X non-nul par : $\forall i, x_i \neq 0$.

III.1.c. La question a fait peur à certains candidats alors qu'il s'agit essentiellement d'un grand classique sur les matrices symétriques.

La définition de “définie-positive” donnée ici ne permettait pas de dire sans justification que pour tout X non nul ${}^t X M X > 0$. Ainsi $i) \implies ii)$ n'a pas toujours été bien justifiée. En revanche, la réussite fréquente de $iii) \implies iv)$ a été une bonne surprise : elle nécessitait pourtant d'introduire une matrice diagonale “racine carrée” de la matrice D .

III.2. Tous les correcteurs ont constaté que la question avait été très mal traitée. Voulant faire vite, les candidats font très mal la symétrie voire la bilinéarité. Pour le caractère non-dégénéré du produit scalaire, le lien n'est pas fait avec la question qui précède : les candidats ont plutôt fait le lien avec la question III.1.a. ce qui fait dire à certains que ${}^t X M X = 0$ donne $M = 0$ ou $X = 0$.

III.3.a. Comme le résultat n'était pas donné, très peu ont trouvé C correctement. Beaucoup oublient de vérifier que C est symétrique.

III.3.b. Question discriminante car le théorème spectral n'a pas toujours été senti.

III.3.c. et d. Peu abordées à cause de deux questions précédentes rarement traitées ensemble.

III.4.a. Beaucoup de candidats traitant la question se sont persuadés d'avoir l'existence de λ_0 dans \mathbb{R}_-^* sans jamais parler des propriétés des racines d'un polynôme.

III.4.b. Très rarement abordée.

Partie IV.

IV.1.a. Bien réussie à condition d'avoir distingué deux cas.

IV.1.b. Bien réussie.

IV.1.c. L'égalité avec $Sp_\infty(A, B)$ nécessitait un raisonnement par double inclusion qui n'a presque jamais été initié. Le cas où 0 était valeur propre de C a été aussi mal rédigé.

IV.2. Peu abordée. Rarement intégralement réussie.

IV.3.a. La question pouvait être traitée correctement indépendamment de tout cas et beaucoup s'en sont fort justement rendus compte.

IV.3.b. Peu abordée car elle nécessitait cette-fois-ci de réinvestir trois questions précédentes.

IV.3.c. Peu abordée même par ceux qui ont réussi la question II.4 et qui pouvaient se contenter d'inverser le rôle de A et B .

Partie V.

V.1. et 2. Très souvent traitées et toujours réussies.

V.3.a. Très souvent traitée et réussie.

V.3.b. Beaucoup traitent cette question par récurrence alors que ce raisonnement était ici inutile.

V.3.c. Le résultat a très souvent été bien conjecturé, mais suivi d'aucune forme de justification (pas même le terme de suite géométrique).

V.3.d. et 4.a.b. et c. Réussies quand elles ont été traitées.