SESSION 2000 TSI005

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n ° 99-018 du 01.02.99.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.
On pourra admettre un résultat pour traiter les questions suivantes.

Dans tout ce devoir les matrices seront des matrices carrées 3×3, ou des matrices colonnes 3×1, à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On pourra identifier matrice carrée avec application linéaire dans une base canonique, et matrice colonne avec vecteur.

Rappels et Définitions

- λ^n, avec λ complexe et n entier naturel, admet une limite lorsque n tend vers l'infini si et seulement si $\lambda = 1$ ou $|\lambda| < 1$.
- On note $\mathrm{Sp}\,(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A.
- On dit que la matrice carrée T de terme général $t_{i,j}$ est triangulaire supérieure si et seulement si : $\forall i > j, t_{i,j} = 0$.
- On dit que la matrice carrée N est nilpotente si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^n = 0$
  (0 est la matrice nulle et N^n est le produit de N par elle-même n fois, par convention $N^1 = N$ et $N^0 = I$ la matrice unité).
- Soit A une matrice de dimension quelconque, de terme général $a_{i,j}$. On pose $\|A\| = \sup\limits_{i,j} |a_{i,j}|$.
  On admet que l'application $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur l'espace des matrices ayant même dimension que A.
- On appelle suite de matrices complexes une application de $D \subset \mathbb{N}$ dans $M_{n,p}(\mathbb{C})$; l'image de k est notée A_k ou $A(k)$, l'élément général de $A(k)$ est noté $a_{i,j}(k)$.
  On dit que la suite $A(k)$ converge vers B (ou admet B pour limite) si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A(k) - B\| = 0$, et on note $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = N$ ou $\lim A(k) = B$.
- À toute suite $A(k)$ de matrices, on associe la suite dite « des sommes partielles » $U(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} A(i)$.
  Si cette nouvelle suite converge, on note $\lim\limits_{k\to+\infty} U(k) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} A(i)$ que l'on appelle *somme de la série de terme général* $A(k)$.
- On note, si cette limite existe, $\exp\,(A) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{A^i}{i!}$.

Le but de ce problème est, pour quelques matrices A, de calculer, lorsque c'est possible, $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} A^i$ et $\exp\,(A) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{A^i}{i!}$.

PARTIE I

Dans cette partie vous démontrerez des propriétés générales sur des limites, des suites et des séries de matrices. Les matrices sont, sauf indication du contraire, dans $M_3(\mathbb{C})$.

1. Le terme général de $A(k)$ est $a_{i,j}(k)$ et celui de B est $b_{i,j}$.

   a. Montrer que $A(k)$ converge vers B si et seulement si $\forall i, j \quad \lim\limits_{k\to+\infty} a_{i,j}(k) = b_{i,j}$.

   A-t-on le même type de propriété pour les matrices colonnes ?

   b. Montrer que $A(k)$ converge vers B si et seulement si pour toute matrice colonne 3×1 notée X, $A(k)X$ converge vers BX.

   c. Montrer que $A(k)$ converge vers B si et seulement si pour toute matrice 3×3 notée C inversible, $A(k)C$ converge vers BC.

   d. Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = B$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} C(k) = D$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} (A(k)+C(k)) = B+D$.

2. **a.** Montrer que $\|AB\| \leqslant 3\|A\|\ \|B\|$. En déduire que $\left\|A^k\right\| \leqslant 3^{k-1}\|A\|^k$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

   b. Montrer que, si A est inversible, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\left\|A^k\right\|^{1/k} \geqslant \dfrac{1}{3\|A^{-1}\|}$.

   En déduire que si $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = 0$ alors A n'est pas inversible.

3. **a.** Simplifier l'expression $(I-A)\left(\sum\limits_{i=0}^{k} A^i\right)$ où I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{C})$.

   b. Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$, alors pour toute matrice colonne 3×1 notée X, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} A^kX = 0$.

   En déduire que $A-I$ est inversible et exprimer son inverse comme somme d'une série.

   En déduire l'existence de $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} A^i$.

4. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = B$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} P^{-1}A(k)P = P^{-1}BP$ avec P une matrice inversible.

   En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = B$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}BP$, avec P une matrice inversible.

5. Soit A telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = B$.

   a. Si B est inversible, montrer que A est égale à I.

   b. Montrer que les valeurs propres de A valent 1 ou ont un module strictement inférieur à 1.

   c. On suppose que A est diagonalisable et que $A \neq I$.

   Montrer que si $1 \notin \mathrm{Sp}\,(A)$ alors B est nulle,

   et que si $1 \in \mathrm{Sp}\,(A)$ alors B est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(B) \subset \{0,1\}$.

6. Soit A quelconque.

   Montrer que si $A = PBP^{-1}$ et si $\exp(B)$ existe, alors $\exp(A)$ existe et $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

PARTIE II

Dans cette partie nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices triangulaires supérieures ou diagonales.

On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c complexes.

Remarque : a, b et c ne sont pas forcément différents.

1. **a.** Calculez M^2, M^3, Q^2 et Q^3.

   b. Déterminer la forme générale de D^k, M^k et Q^k avec $k\in\mathbb{N}^*$.

2. **a.** Déterminer les a, les b et les c pour que D^k, M^k et Q^k convergent.

   Calculer dans ce cas $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k$, $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} Q^k$.

   b. Si on suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = 0$, calculer $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} D^i$.

c. Si on suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = 0$, calculer $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} M^i$.

d. Si on suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} Q^k = 0$, calculer $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} Q^i$.

3. Montrer que $\exp(D)$, $\exp(M)$ et $\exp(Q)$ existent et déterminer leur valeur.

PARTIE III

Dans cette partie nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices nilpotentes. Dans toute cette partie, sauf indication du contraire, on considère N une matrice carrée 3×3 nilpotente non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. a. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) N est nilpotente
(ii) $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$
(iii) N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle
(iiii) $N^3 = 0$.

Application : En déduire que l'équation $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue A une matrice carrée 3×3 n'admet pas de solution.

b. Montrer que $\det(I - N) = 1$.
En déduire que $I - N$ est inversible. Que vaut l'inverse de $I - N$?
Quelles sont les valeurs propres de $I - N$? En déduire que $I - N$ n'est pas diagonalisable.

c. Montrer que si $N^2 \neq 0$ et N nilpotente alors il existe $X \in \mathbb{C}^3$ telle que $\left(X, NX, N^2X\right)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
En déduire que :
A commute avec $N \Leftrightarrow A$ combinaison linéaire de I, N, et N^2.
En déduire que si A commute avec N alors $\det(A - N) = \det(A)$.
A-t-on encore $\det(A - N) = \det(A)$ si A ne commute pas avec N ?

2. Soient N_1 et N_2 deux matrices nilpotentes telles que $N_1N_2 = N_2N_1$.

a. Montrer que N_1N_2 et que $N_1 + N_2$ sont nilpotentes.

b. En développant $(N_1 + N_2)^3$ et $(N_1 + N_2)^4$, montrer que $N_1N_2^2 + N_1^2N_2 = 0$ et que $N_1^2N_2^2 = 0$.

c. Montrer que $\exp(N_1 + N_2) = \exp(N_1)\exp(N_2)$.

d. En déduire que si N est nilpotente alors $\exp(N)$ est inversible ; vous donnerez l'inverse de $\exp(N)$.

3. Application : Dans cette question (et dans cette question seulement) on considère

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que N est nilpotente.

b. Calculer $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} N^i$. En déduire l'inverse de $I - N$.

c. Calculer $\exp(N)$ et $\exp(-N)$.

PARTIE IV

Dans cette partie nous calculerons l'exponentielle d'une matrice dans deux cas particuliers.

1. On considère $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de R.

b. Déterminer les espaces propres de R. R est-elle diagonalisable ?
En déduire que $\exp(R)$ existe. Calculer $\exp(R)$.

2. On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de M.

b. Déterminer les espaces propres de M. M est-elle diagonalisable ?
Déterminer U et V, deux matrices colonnes 3×1 propres de M, avec U associée à la valeur propre 1 et V associée à la valeur propre -1.

c. Déterminer W matrice colonne 3×1 telle que $(M + I)W = V$.
En déduire que M et T sont deux matrices semblables.
Déterminer une matrice 3×3 notée P inversible telle que $M = PTP^{-1}$.
Montrer que $\exp(M)$ existe. Calculer $\exp(M)$.

Fin de l'énoncé