HARINGTON Bruno

Thème

L'exercice proposait de travailler avec le commutant d'une matrice trigonalisable. On demandait de trigonaliser une matrice, de chercher le commutant de la matrice triangulaire et d'en déduire, par isomorphisme, le commutant de la matrice de départ.

Le problème permettait de découvrir des inégalités de déterminants en travaillant principalement avec des matrices symétriques réelles. Il demandait aussi aux candidats de mettre en œuvre un algorithme et ainsi de pouvoir utiliser leur calculatrice programmable.

Observations générales

Le sujet, bien équilibré et progressif, ne comportait aucune difficulté sérieuse et proposait des questions accessibles jusqu'à la fin. Les parties étaient largement indépendantes, ce qui permettait aux candidats de ne pas rester bloqués. Un candidat bien préparé pouvait faire le sujet dans son intégralité.

Certaines questions de cours (démonstrations de théorèmes) ou proches du cours devaient avantager les candidats et pourtant un trop grand nombre d'étudiants laissent échapper des points « faciles » dans ces questions. Il faut donc insister sur le fait que le cours doit être mieux maitrisé.

C'est un sujet qui a parfaitement rempli son rôle et permis de bien classer les candidats.

Remarques détaillées par question

Exercice

- Confusions entre polynôme annulateur et polynôme minimal. On lit même souvent : soit P « le » polynôme annulateur.
- Confusions entre rang d'une matrice et dimension de l'espace vectoriel.
- Méconnaissance du critère de sous-espaces vectoriels. Un étudiant qui ne sait pas prouver que F est un sous-espace vectoriel de E donne une mauvaise image de lui au correcteur.
- Ne pas savoir trigonaliser une matrice ou rechercher une nouvelle base.
- Calcul faux du polynôme caractéristique de la matrice A alors qu'elle doit être semblable à la matrice T !
- Certaines matrices de passage ne sont pas inversibles ! (deux colonnes identiques, par exemple).
- Pour démontrer qu'une application u est un automorphisme d'espaces vectoriels, certains démontrent que u est injective en utilisant son noyau avant de démontrer que u est linéaire.

- À la question 5c. « ce résultat est-il vrai… » est une suggestion pour que le candidat propose un contre-exemple. En général ce contre-exemple est simple à trouver, dans le cas contraire, le candidat serait guidé.

Problème

1. Question de cours très classique pas toujours abordée. Il est préférable de répondre par double implication.
On rencontre ici des matrices A qui sont carrées et vérifient $A \geq 0$!
Attention à l'erreur : « $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i{}^2 = 0$ donc tous les λ_i sont positifs ».

2. Question en général bien traitée. On rencontre l'erreur : « $\det S = \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$ ».

3. Pour démontrer que la matrice est symétrique positive, certains oublient de d'abord vérifier que cette matrice est symétrique.

4. GROSSE confusion entre matrices semblables et matrices congruentes. Par exemple, il est faux ici de penser que ${}^tR = R^{-1}$.
Pour la question b) il suffisait de constater que la matrice C était symétrique réelle.
Pour la question d) il fallait chercher une autre matrice diagonale que $\mathrm{diag}(0,2)$.

5. La question a) est souvent correcte sauf pour ceux qui pensent que la matrice P est orthogonale. En revanche la question b) a été peu réussie.

6. Question la mieux réussie du problème. On notera cependant des erreurs : « $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ » ou encore « la fonction ln est convexe ».

7. Question assez mal traitée en général. Il y a souvent dans les sujets CCP une question sur la densité, rarement difficile. Pour la partie b) de cette question, on oublie souvent l'argument de continuité.

8. La preuve de l'unicité est trop souvent confuse.

9. Question peu difficile qui rapporte beaucoup de points et pourtant très peu abordée. Ceux qui l'ont traitée ont en général le maximum de points (environ : 2.5/20)

10. Question en général correctement abordée par les quelques candidats qui sont arrivés à la fin du sujet. Pour la partie b) ils oublient, en général, de prouver que ${}^tMM$ est symétrique positive.

10 conseils pour les futurs candidats

1. Réviser le cours. Savoir refaire les démonstrations des théorèmes importants.

2. Le futur ingénieur devra savoir utiliser les outils informatiques. Il est recommandé aux futurs candidats, durant leurs deux années de préparation, de prendre davantage en considération les travaux dirigés d'informatique et de savoir bien utiliser une calculatrice programmable.

3. Les questions d'algorithmique demandent du temps aux étudiants et, en conséquence, rapportent beaucoup de points. Il est donc conseillé aux candidats de traiter ces questions.

4. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.

5. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.

6. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.

7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.

8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation. En particulier, il est recommandé aux candidats de mettre en évidence les résultats de chaque question (souligner ou encadrer).

10. Dans une démonstration, éviter d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.

Conclusion

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice.
- Le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir la moyenne au moins.

La moyenne de l'épreuve est de 10,79 et l'écart type est de 3,81.