MATHÉMATIQUES II

Monsieur Christian DUPUIS

Le sujet portait sur l'étude des matrices de Gram et se terminait par une application au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien.

De nombreuses questions faciles, parfois même des questions de cours, étaient proposées aux candidats.
L'enchaînement était progressif et les démarches proches du cours et de ses applications directes. Les résultats demandés étaient mis en évidence pour permettre aux étudiants de progresser dans le problème.

On peut rappeler aux étudiants qu'ils rédigent des solutions et que même les questions faciles nécessitent une argumentation logique, c'est-à-dire une démonstration ; paraphraser l'énoncé, même quand la réponse apparaît aisément, n'est pas satisfaisant.

La présentation des copies est globalement satisfaisante, même souvent très bonne, ce qui assure une correction efficace. Malheureusement l'orthographe est souvent négligée.

On peut noter que la calculatrice est sous-utilisée. Toutefois, on remarque plusieurs candidats qui n'hésitent pas à justifier un calcul simple par « résultat obtenu à la calculette », qui met en confiance le correcteur. Signalons enfin que quelques candidats ont traité l'intégralité du problème.

Dans la partie I on faisait calculer des déterminants pour obtenir un résultat servant à illustrer la dernière partie. Les premières questions étaient essentiellement un exercice de lecture. Si les déterminants d_n et d_{n-1} sont justes, d_{n-2} est souvent faux ; ces déterminants avaient respectivement 1,4 et 9 coefficients. Dans l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ suggérée à la question I.1.3, le cas $j=1$ du coefficient de la première colonne est rarement traité.
De nombreux candidats n'ont pas lu l'avertissement de la question I.2 : « les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n » pourtant écrit en gras. Il faut lire attentivement les énoncés.

La partie II proposait de démontrer des résultats sur la matrice d'une forme bilinéaire. Comme cela ne fait pas partie du programme, la démarche était comparable à celle d'un cours et très gradué. On peut regretter des justifications insuffisantes sur les questions les plus simples. Il semble que les élèves ayant manifestement suivi un cours poussé (et hors programme) sur les matrices des formes bilinéaires soient désavantagés. Bien souvent ils maîtrisent mal ces notions et ont du mal à suivre les indications de l'énoncé qui conduisent aux résultats demandés.

Dans la question (de cours $X = PX'$) II.A.3.1, on lit toute sorte de formules ; la formule à l'envers $X' = PX$ mais aussi $X' = P^{-1}XP$...
Pour certains candidats, la formule de changement de base $A' = {}^tPAP$ qui est donnée est fausse ; à la place ils prennent $A' = P^{-1}AP$ avec P orthogonale pour rester dans le cadre des matrices d'endomorphismes, qui n'est pas celui du problème.

Un certain nombre de candidats voient l'idée qui est demandée dans la question II.A.3.5, qui est la conclusion de II.A; un pourcentage non négligeable de ceux-ci compliquent la rédaction en complétant la famille libre donnée en une base. C'est inutile et le raisonnement est alors difficile à faire.

Dans II.B, il n'est pas admissible que le déterminant d'ordre 2 à calculer donne lieu à des formules fantaisistes. Le raisonnement sur l'inégalité de Canchy-Schwarz qui en découle est souvent escamoté, c'est dommage. Les questions II.B.2 et II.B.3 sont presque toujours traitées.

Dans II.B.4 la symétrie de la matrice à coefficients réels M n'est pas toujours mise en avant pour justifier que ses valeurs propres sont réelles. Au lieu de cela on lit des démonstrations sans logique dans lesquelles λ est une valeur propre complexe et X un vecteur propre associé à coefficients réels (!) qui conduit à λ réel.
Enfin dans II.B.6, qui est l'aboutissement de II.B, si l'idée est correctement perçue par ceux qui traitent la question, l'ordonnancement des arguments n'est pas assuré. Les étudiants raisonnent par équivalence, comme dans les questions précédentes, alors qu'il s'agit de montrer une implication. Cela semble du à une volonté de passer vite sur les questions pour aller le plus loin possible dans le problème, au détriment d'une réflexion sérieuse sur chaque démonstration. Dans plusieurs copies on a pu lire $\det(MX) = \det(M)\det(X)$ alors que X est une matrice colonne, ou le raisonnement $MX = 0$ avec M inversible donc non nulle entraîne $X = 0$.

Dans la partie III beaucoup de candidats traitent les deux premières questions et une partie de la troisième. En revanche la question III.4 qui porte sur une condition nécessaire et suffisante est très mal traitée ; les étudiants partent de l'égalité $\cos(\alpha) = \cos(\beta \pm \gamma)$ avec des déductions hasardeuses, pour obtenir de force l'une des conditions données sur les angles α, β, γ. Un nombre très faible de candidats démontrent la réciproque, qui était simple. Là encore, il semble que les étudiants passent le moins de temps possible sur la question se contentant d'une vague justification d'une implication. Il faut prendre le temps de lire que l'on demande une équivalence, dont la réciproque est élémentaire.
Les questions III.5.1 et III.5.2 sont correctement traitées aux erreurs de calcul près. Dans III.5.3.1, si beaucoup d'étudiants comprennent que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ en dessinant l'étoile que forment ces vecteurs, très peu de ceux qui ont eu cette intuition géométrique n'ont songé que ces vecteurs ne sont pas coplanaires de façon évidente.
Enfin la dernière question de cette partie, lorsqu'elle est abordée, est assez bien traitée.

La partie IV termine ce problème. Dans les premières questions qui utilisent les propriétés des déterminants, on lit des réponses fantaisistes. Les bonnes réponses sont rarement justifiées correctement, les candidats se contentant souvent de « par linéarité du déterminant ». Si le résultat de IV.2.1 est souvent correctement démontré, celui de IV.2.2 est confus.
Les deux premières parties de IV.3, qui sont classiques, sont en général bien traitées. On a tout de même lu $t^k e^{-t} \sim e^{-t}$ en $+\infty$! La dernière question qui utilise le résultat de la fin de la partie I et qui illustre, par un exemple, une application des matrices de Gram, est peu abordée, avec parfois des résultats partiels.

En conclusion de ce rapport, devant les points perdus par des candidats qui ont consacré trop peu de temps à des questions qui étaient à leur portée, on peut recommander une lecture attentive du sujet et un temps de réflexion minimum consacré à chaque question abordée.