Épreuve : MATHÉMATIQUES I Filière MP

Les calculatrices sont autorisées

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto ||f|| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(x)|$ et $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même. Soient v un élément de $L(E)$ et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $L(E)$ est muni de la norme $v \mapsto |||v||| = \sup_{||f||\leqslant 1} ||v(f)||$.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, dans les deux premières parties, on met en place les outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x > 0$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

De plus, pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I - Questions préliminaires

I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

I.3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0$,
$$\gamma^x = \circ(\Gamma(x)) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geqslant 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.
(On pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit h un nombre réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant h\phi(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,dt$.

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

II.A.3) Prouver que :

$$\lim_{h\to 0, h>0} h\sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt.$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{[\frac{a}{h}]} h\phi(nh) + \sum_{n=[\frac{a}{h}]+1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où $[\frac{a}{h}]$ désigne la partie entière du nombre réel $\frac{a}{h}$).

- version du 23 février 2009 13h45

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire que

$$\lim_{x\to 1, x<1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x) = \Gamma(\alpha).$$

II.B.2) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n$.

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$$

Partie III - La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.
Pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt.$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α,β) de réels strictement positifs, les relations suivantes :

(i) $\quad B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$

(ii) $\quad B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt$

(on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$.)

(iii) $\quad B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\beta > 0$ la formule suivante :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs 2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose :

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitienne sur le segment $[0,1]$.
On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire tel que :

$$\forall x,y \in [0,1],\ |\psi_{\alpha,\beta}(x) - \psi_{\alpha,\beta}(y)| \leqslant A_{\alpha,\beta}|x-y|.$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.$$

c) On reprend les notations de la question (II.B.2).
Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n.$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x, $0 \leqslant x < 1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma>0}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

III.C - Formule des compléments

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

III.C.2) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = 2q\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt.$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note :

$$z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}.$$

Établir que :

$$(*) \qquad \frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right).$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((t-Rec)^2 + (Imc)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-Rec}{Imc}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-c}$, prouver en utilisant judicieusement la relation (*) que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = -i\,\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{\pi}{2q}\,\frac{1}{\sin(\frac{2p+1}{2q}\pi)}.$$

III.C.3) Déduire de (III.C.1) et (III.C.2) que :

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Partie IV - L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant l'intervalle $]0,1[$.

IV.A -

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt \quad \text{si } 0 < x \leqslant 1.$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0,1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,dt.$$

b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction$A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||A_\alpha||| = \sup_{||f||\leqslant 1} ||A_\alpha f|| = \frac{1}{1-\alpha}.$$

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identité de E) et, pour tout $n \geqslant 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n.$$

IV.B.1) On pose $\beta = 1-\alpha$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$ établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}||f||.$$

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$|||A_\alpha^n||| \leqslant \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

IV.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.
On note g la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha) g = f.$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n (f)$.

IV.C - Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}.$$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0,1],\ Pf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P e_n.$$

Établir que pour toute fonction polynômiale ψ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) \psi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P \psi.$$

IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$|||P||| = \sup_{||f|| \leqslant 1} ||Pf|| = 1.$$

b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P.$$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée.

Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E.$$

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

• • • FIN • • •
