

Mathématiques 1

Présentation du sujet et analyse globale des résultats

Le problème de cette année proposait une démonstration du théorème de Jörgens, c'est-à-dire la recherche des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 à valeurs réelles qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 = 1 \quad (1)$$

L'objectif était de conduire les étudiants au résultat suivant : les solutions de (1) appartiennent à l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à 2.

La partie I était une occasion d'effectuer des calculs sur les fonctions de plusieurs variables et d'utiliser le théorème de composition de telles fonctions. Deux questions ont particulièrement permis de tester les connaissances et la maîtrise des théorèmes du programme :

- **I.C.1** pour la dérivation des intégrales paramétrées ;
- **I.C.3** pour les séries de Fourier.

La partie II a permis de trier ceux qui avaient saisi les enjeux du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas non linéaire et non autonome.

La partie III, pourtant « classique », a rebuté de nombreux candidats. Nombreux sont ceux qui n'ont pas compris la notion de différentielle.

La partie IV, peu abordée, mise à part la question **IV.A**, a été, pour de très rares candidats l'occasion de montrer leur capacité à justifier qu'une matrice symétrique réelle d'ordre 2 est positive, voire ici définie positive.

Ceux qui avaient fait une impasse sur le chapitre « Fonctions de plusieurs variables » n'avaient aucune chance de faire face à l'épreuve de cette année.

Commentaires sur les réponses apportées

De très nombreux candidats n'expliquent pas qu'une fonction est dérivable ou différentiable avant calcul. Par exemple dans les questions **I.A**, **I.B**, **II.D**, **III.B.1**, **IV.A**, **IV.B**, ...

Les énoncés et hypothèses des théorèmes utilisés ne sont pas donnés, par exemple dans les questions : **I.B.2**, **I.C.1**, **III.B.1**, **III.B.2**, **IV.A**, ...

Le jury regrette que certains candidats puissent écrire $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 / \frac{\partial x}{\partial u}$, ou $\frac{\partial w(xy)}{\partial x}$.

Les équations différentielles d'Euler sont invoquées dans le début du problème et ensuite « la méthode classique » de résolution est utilisée alors qu'elle est non seulement hors programme, mais tout à fait inutile ici.

Un grand nombre de candidats n'utilise pas la question **I.B.1** pour résoudre **I.B.2**.

Un grand nombre de candidats affirme que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle donnée est un espace vectoriel de dimension 2 sans préciser que cette équation est « résolue » ou que le coefficient de y'' n'est pas nul sur \mathbb{R}_+^* .

I.C.1 Le théorème de dérivation des intégrales paramétrées est rarement bien maîtrisé. Les hypothèses ne sont pas rappelées et vérifiées clairement. Il est à noter que le programme officiel ne contient pas explicitement le corollaire concernant les intégrales sur un segment.

L'hypothèse de domination est généralement mal justifiée. On voit des notations peu claires comme $\left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|_\infty$ ou des affirmations telles que :

$$\left| \int_a^b h(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \left| \int_a^b M e^{-in\theta} d\theta \right|$$

Rappelons aux candidats que le théorème d'intégration par parties sur un segment a des hypothèses, et que l'on ne doit pas se contenter d'écrire que le « crocheton » est nul, sans la moindre explication.

I.C.2 Le théorème de Dirichlet est souvent invoqué à tort. Rappelons que les théorèmes du cours s'appliquent à des fonctions d'une variable et T -périodiques.

On lit que la fonction de deux variables \tilde{f} est 2π -périodique.

II.B Parler comme l'ont fait certains candidats du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire était, bien sûr hors de propos, mais invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles non linéaires et non autonomes sans préciser la fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u' = f(t, u)$ et sans dire que \mathcal{U} est l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ne servait à rien.

III.A Définition et caractérisation sont très rarement suivies. Pour une partie non négligeable des candidats un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme est d'abord un morphisme ... Ils n'ont donc rien pu faire dans cette partie du problème.

III.B.1 La notation « classique » $dF_{p+t(q-p)}(q-p)$ a posé des problèmes insupportables à de très nombreux candidats. On a vu des candidats proposer « le changement de variable $u = p+t(q-p)$ ».

III.C.1 Le résultat est donné par de nombreux candidats, mais rarement avec des justifications correctes.

III.C.4 Prouvée par un faible nombre de candidats.

Pour **IV.A**, conformément au programme, le jury n'a pas accepté le résultat suivant : la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est définie positive si, et seulement si, $a > 0$ et $ad - bc > 0$.

Conseils aux candidats

Lire un énoncé comme si celui-ci était un GPS programmé pour conduire au résultat final. Si l'on n'utilise pas **I.B.1** pour résoudre **I.B.2**, c'est que l'on n'a pas compris le cheminement proposé par l'énoncé. Dans tous les cas, on court le risque de s'égarer.

Les mots ont un sens ! Il faut comprendre la différence entre une définition et une caractérisation.

Éviter d'écrire : intégration par partie (sans « s »), série de Fourier (sans capitale), « il est clair que », les phrases sans verbe, ...

Éviter de confondre une fonction et son image. Cela peut se révéler grave lorsque l'on parle de fonctions de plusieurs variables.

Conclusions

Le sujet bien équilibré a permis de bien départager les candidats. Les correcteurs ont constaté avec un plaisir certain, que leurs conseils des années précédentes ont été entendus et que de bonnes copies les rassurent quant à la formation donnée et aux efforts accomplis par les candidats.