Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le problème de cette année étudie deux types d'interaction entre fonctions réelles et matrices. Il est divisé en deux sous-problèmes indépendants.

L'objectif des parties I, II et III est de définir la notion de série entière de matrices, par extension de l'application d'un polynôme à une matrice. La première partie introduit la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et fait apparaître son caractère sous-multiplicatif. La partie II étudie des séries à valeurs dans l'espace ainsi normé, pour démontrer qu'une série entière en une matrice A peut s'écrire comme un polynôme en A. Enfin, la partie III présente deux applications : tout d'abord une extension de la notion d'exponentielle de matrices vers la trigonométrie matricielle, puis une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton à l'aide d'une série géométrique matricielle.

Les parties IV et V s'intéressent à l'action d'une fonction ξ sur une matrice coefficient par coefficient. On détermine dans la partie V les fonctions continues pour lesquelles cette action préserve le caractère inversible de la matrice. L'idée générale de la preuve est d'établir le caractère bijectif de ξ pour ramener le problème à une équation fonctionnelle sur sa réciproque η. Cette équation fonctionnelle est, à transformation près, celle étudiée dans la partie IV. Seules les fonctions ξ linéaires conviennent lorsque $d \geqslant 3$, mais il y a beaucoup plus de solutions lorsque $d = 2$, à savoir les fonctions impaires du type $x \mapsto Cx^\alpha$.

Analyse globale des résultats

Le sujet est assez difficile, mais les compétences attendues sont suffisamment variées pour permettre à chaque candidat de s'exprimer. Toutes les parties ont été abordées, avec succès, par un grand nombre de candidats. Certains candidats remarquables ont réussi à impressionner le jury en traitant la quasi-totalité des questions.

La première partie est proche du cours, la principale difficulté consiste à bien identifier les arguments à utiliser.

Les deuxième et troisième parties demandent aux candidats de maîtriser le cours pour montrer leur capacité à généraliser les notions apprises, sur un contexte légèrement différent. Le problème les guide beaucoup pour les aider à explorer des sujets situés à la frontière du programme des classes préparatoires.

Enfin, les quatrième et cinquième parties ne demandent pas beaucoup de connaissance du cours, mais l'étude d'une équation fonctionnelle permet de mesurer les compétences en analyse et synthèse, en prise de recul et en créativité. Sur ces deux parties, la qualité de la rédaction est déterminante.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Les candidats ont eu beaucoup de mal à saisir l'enjeu de certaines questions, du moins à situer la question dans le chapitre adéquat. Ainsi la question **I.A** s'inscrit dans le chapitre « fonctions de plusieurs variables » (et non algèbre linéaire), la question **II.A** dans le chapitre « suites et séries de fonctions » (et non séries entières).

La grande majorité des candidats connaissent la formule $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}$ et ont pu ainsi traiter avec succès les questions **I.B** et **I.C**.

Dans la question **II.A**, on retrouve très souvent une confusion de vocabulaire entre la convergence absolue (de la série des normes des matrices) et la convergence normale (d'une suite de fonctions). Une autre erreur classique consiste à penser que si R est le rayon de la série $\sum a_n z^n$, alors $\sum a_n R^n$ converge.

Dans la question **II.B.2**, beaucoup de candidats pensent que si une famille est liée, alors le dernier vecteur est forcément combinaison linéaire des autres.

La quasi-totalité des candidats commettent une erreur de logique dans la question **II.C**, liée aux quantificateurs utilisés.

Dans la question **III.A.1**, le produit de Cauchy est souvent mentionné uniquement dans le cadre des séries entières.

Dans la question **III.B.1**, rares sont les copies où l'on s'interroge sur la convergence de la série avant de calculer le produit.

Une partie notable des candidats confondent dans la question **IV.A** la dérivée d'une fonction et ses taux d'accroissement.

Enfin, dans la partie **V**, une bonne partie des candidats ont utilisé la relation $\xi(0) = 0$ dans la deuxième question, alors que cette propriété était démontrée trois questions plus tard.

Le jury ne peut que rappeler aux candidats qu'il est toujours utile et profitable de prendre un peu de temps pour comprendre l'architecture du problème et le lien entre les questions. S'il est certes difficile de lire la totalité du problème au premier abord, il est néanmoins nécessaire de lire entièrement la partie en cours avant de commencer à répondre aux questions.

Par ailleurs, le jury a remarqué un relâchement dans l'exigence de rédaction. La présence massive d'abréviations, de phrases sans verbe, de ratures ou l'emploi du blanc correcteur (sur du papier rose, ce n'est pas très discret...) compliquent la tâche du correcteur, qui doit parfois interpréter ce qu'il lit. Et cette interprétation est rarement favorable au candidat. Le jury est toujours plus conciliant avec des copies bien présentées et des résultats encadrés.

Conclusions

Le sujet était assez difficile, mais la variété des compétences attendues a permis à chaque candidat de s'exprimer. Certains candidats remarquables ont réussi à impressionner le jury en traitant correctement la quasi-totalité des questions.