

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le problème posé cette année aux candidats aboutissait à deux résultats issus de la théorie des graphes. Le premier, obtenu dans la partie III, s'intéressait à l'indice de primitivité maximal d'une matrice primitive. Le second, obtenu dans la partie VI, faisait ressortir le coefficient d'imprimitivité comme le plus grand diviseur commun des longueurs des coefficients des circuits.

Pour ne pas enfermer les candidats dans des objets trop éloignés du cours, les parties I et IV s'intéressaient à des résultats classiques sur la limite des puissances d'une matrice relativement à son rayon spectral. Dans la partie IV, le théorème de Perron-Frobenius était admis et il s'agissait pour les étudiants d'en déduire des conséquences.

## Analyse globale des résultats

Le sujet de cette année était très long : 6 parties dont la difficulté était à peu près similaire, sauf la dernière partie, qui commençait par quelques questions assez difficiles et n'a été abordée significativement que dans une poignée de copies. Ce sujet était conforme à la description des épreuves diffusée sur le site du concours : les candidats ont été évalués sur leurs capacités à s'approprier une problématique, assimiler un vocabulaire, conduire des démonstrations, et présenter un travail rédigé, rigoureux et précis.

Chacune des six parties pouvait être abordée indépendamment des autres, mais chacune nécessitait de comprendre des notations et des enjeux spécifiques, ce qui rendait le sujet peu propice au grappillage. La sélectivité a été assez forte, presque aucune question n'ayant été totalement réussie par plus de 50% des candidats. On a pu ainsi observer un nombre important de notes très basses.

Soulignons ici que dans la mesure où les questions étaient très majoritairement fermées, la qualité de la rédaction a joué un rôle prépondérant dans l'évaluation des copies. Si une majorité des candidats a fait des efforts remarqués pour produire un texte lisible sans effort, le jury regrette qu'un nombre particulièrement important de copies soit à la limite de la lisibilité, voire en-dessous de la limite (dans certains cas, la réponse à la question n'a même pas pu être lue). La qualité de la rédaction ne se mesure pas forcément à la calligraphie, mais à la production de textes grammaticalement corrects, dans lesquels les arguments principaux sont soulignés, l'indentation maîtrisée, et qui ne soient pas truffés d'abréviations abusives. Notons sur ce dernier point que si l'utilisation des quantificateurs est parfaitement adaptée à l'expression précise de propriétés mathématiques, elle devient abusive lorsque ceux-ci doivent se lire « en phonétique » à l'intérieur d'une phrase écrite en français (typiquement : « nous supposons qu'  $\exists$  un chemin »).

Les candidats qui ont cédé à la facilité d'une rédaction bâclée ont été systématiquement sanctionnés.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Dans la sous-partie I.A, les propriétés caractéristiques d'une norme sont connues par les deux tiers des candidats, le tiers restant oubliant à égalité l'une des trois propriétés attendues (séparation, homogénéité et inégalité triangulaire). Pour prouver la sous-multiplicativité, de nombreux candidats ont produit des inégalités pas toujours convaincantes, de type  $\max \leq \max \leq \max \dots$  Des variables

utilisées à l'intérieur d'une sommation se retrouvaient régulièrement comme variables muettes, par exemple  $\sum_k (\max_k \dots)$ , ce qui était au moins maladroit.

Dans la sous-partie **I.B**, le calcul des coefficients de  $\Delta^{-1}T\Delta$  a été plutôt bien réalisé, même si rares ont été les candidats qui ont réussi à construire une valeur de  $\delta$  convenable. Pour la conclusion de la question, le jury a été surpris de voir que la moitié des candidats invoque la continuité de la norme pour passer de  $\|A^m\|_{m \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$  à  $A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ .

La partie **II** a été évaluée en grande partie sur la qualité de la rédaction. Dans la question **II.B**, le fait de démontrer par récurrence que deux propriétés sont équivalentes a posé des difficultés de logique à la moitié des copies environ.

Dans la partie **III**, probablement la plus facile et globalement la mieux réussie dans ses sous-parties **III.A**, **III.B** et **III.C**, la qualité de la rédaction a encore une fois été discriminante, pour distinguer une affirmation étayée d'une affirmation qui ne l'était pas. Dans la question **III.B.5**, une erreur récurrente consistait à penser qu'une valeur propre ou un vecteur propre d'une matrice positive étaient forcément positifs. Concernant le calcul du polynôme caractéristique dans la question **III.C.1**, le jury attendait une explication sur les calculs effectués, notamment de préciser les lignes et colonnes par rapport auxquelles le candidat développait son déterminant. Dans la mesure où le résultat était donné, le jury a rencontré de nombreux procédés malhonnêtes, notamment des calculs faux aboutissant au résultat exact ; les copies concernées ont été lourdement sanctionnées. Par ailleurs, de nombreux candidats ont reconnu et nommé comme tel le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. La notion n'étant pas au programme, les correcteurs n'ont pu donner de points sur cet argument.

La partie **IV** faisait appel à des notions d'algèbre linéaire et euclidienne. C'est dans cette partie que les correcteurs ont rencontré le plus d'erreurs et de confusions. Citons pêle-mêle les plus graves : confusion entre supplémentaire et supplémentaire orthogonal, théorème du rang utilisé sur une somme de sous-espaces et non une somme de dimensions, confusion entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  comme espace de départ, multiplications entre matrices de tailles incompatibles. La notation  $A^\top$  pour la transposée, conforme au nouveau programme, est relativement bien appropriée par les candidats, toutefois elle s'est transformée dans un bon nombre de copies en  $A^\perp$ , ce qui a parfois conduit à des textes très difficiles à lire.

Enfin, la partie **V**, très souvent abordée dans ses premières questions, a mis en lumière chez certains candidats des confusions portant sur l'interversion des quantificateurs. Dans les deux premières questions, le fait que  $m$  soit dépendant de  $(i, j)$  n'apparaît pas toujours compris. Concernant les exemples demandés aux questions **V.A.3** et **V.A.4**, trop de candidats donnent une matrice (souvent juste) mais sans expliquer précisément pourquoi elle est irréductible ou ne l'est pas, et pourquoi elle est primitive ou ne l'est pas.

## Conclusion

Les candidats de cette année ont pu être impressionnés par la longueur du sujet et son côté inhabituel. S'il est facile de faire une évaluation négative, en listant les points qui manquent ou les questions non traitées, le jury préfère constater que le sujet était adapté à une évaluation positive : les candidats ont eu de nombreuses occasions de faire la preuve de leurs multiples compétences, et la note finale reflète non pas l'absence de l'une ou l'autre, mais la présence de ces capacités.

L'échelle des notes est adaptée à ce que l'on attend d'une épreuve de mathématiques d'un concours exigeant. Le sujet de cette année a rempli parfaitement sa fonction.