Mathématiques

Mathématiques I

Le thème du problème est l'étude d'une famille de polynômes orthogonaux, puis d'une famille de polynômes définis à partir de ces polynômes orthogonaux, ce qui conduit à une suite de fonctions rationnelles approchant uniformément la fonction $\ln\big((x+1)/(x-1)\big)$ pour x supérieur ou égal à $1 + a$, pour tout $\alpha > 0$.

Le problème couvre une large partie du programme de PC : rayon de convergence d'une série entière, produit de séries, équations différentielles, convergence normale d'une série de fonctions, interversion séries - intégrales, théorème de Weierstrass, formule de Parseval, théorème des valeurs intermédiaires, algèbre linéaire.

Préliminaires

a) Cette question était une application directe du cours : développement en série entière de $(1+x)^\alpha$. Certains étudiants ont voulu retrouver ce résultat, ont fait des erreurs de calcul et n'ont pas paru étonnés de trouver un rayon de convergence infini pour cette série.

b) En général bien traité.

c) Cette question n'a à peu près jamais été bien traitée : ceux qui avaient remarqué que les coefficients en a) et en b) étaient les mêmes en ont déduit immédiatement la relation sans se rendre compte qu'elle n'était valable, a priori, que sur les réels.

d) Très peu d'étudiants se souviennent qu'il existe 2 nombres complexes a tels que $a^2 = b$ si b est un nombre complexe non nul.

e) Beaucoup reconnaissent les polynômes de Tchebitchev mais ne jugent pas utile de faire la démonstration de l'existence de ces polynômes. Pour ceux qui choisissent une démonstration par récurrence, l'initialisation est souvent fausse.

Partie I

A) La vérification de la positivité de $1 - 2xt + x^2$ est rarement faite ; l'équation différentielle n'est obtenue que dans la moitié des copies. Pour montrer l'unicité de la solution, le théorème de Cauchy est évoqué sans être justifié.

B.1) Les étudiants n'ont pas vu quel était le problème et pourquoi ils devaient utiliser le préliminaire d). Quand le produit de Cauchy est utilisé, il est rarement rappelé que les séries doivent être absolument convergentes et il y a de nombreuses erreurs de calcul, ce qui empêche de traiter correctement les questions B.2) et B.3).

B.2) Ceux qui avaient correctement traité la question précédente ont su utiliser le préliminaire d) pour conclure.

B.3) La convergence normale est très rarement correctement montrée.

B.4) En général, cette question a été bien traitée.

B.5) Cette question est abordée dans à peu près toutes les copies mais l'initialisation des raisonnements par récurrence est souvent incorrecte et il y a une confusion fréquente entre polynôme pair (resp. impair) et degré pair (resp. impair) du polynôme.

C.1) La définition de la fonction est rarement correctement montrée. Beaucoup oublient que pour parler de $\ln u$, il faut vérifier que u est strictement positif. Le calcul de l'intégrale était demandé pour tout couple (a,b) donc il fallait examiner le cas $a = b$.

C.2) L'obtention de cette relation était assez pénible et, comme le résultat était donné, seuls les candidats qui ont commencé la démonstration puis explicité les calculs intermédiaire ont obtenu les points correspondants.

C.3) La démonstration de la convergence normale est très rarement faite correctement. Cette convergence normale est évoquée pour justifier l'interversion somme et intégrale sans que le théorème utilisé soit clairement énoncé.

D) Cette question a été très rarement abordée.

E 1) et 2) Ces questions ont été abordées seulement par environ 15% des candidats mais elles ont alors été correctement traitées.

La question 3) n'a pas été abordée.

F) Ceux qui ont abordé cette question (environ 20%) ont pensé à utiliser l'intégration par parties mais le passage au complexe conjugué dans le calcul du produit scalaire a été très souvent oublié. L'équation différentielle (5) n'a presque jamais été obtenue.

Partie II

Seule la partie D) a été abordée et ceci par environ 15% des candidats.

1) La moitié des étudiants évoque les polynômes de Lagrange alors qu'une démonstration complète était demandée.

2), 3) et 4) Bien traitées par ceux qui sont arrivés jusque là.

5) Aucun candidat ne montre que les λ_i sont des réels strictement positifs et la valeur de la somme des λ_i est obtenue par quelques candidats.

Pour terminer, quelques erreurs communes :

- les modules sont systématiquement oubliés dans les questions de majoration d'où des inégalités entre nombres complexes ;
- il y a souvent confusion entre polynôme et fraction rationnelle ;
- une série entière est considérée comme un polynôme d'où sa continuité ;
- les fautes d'orthographe sont très nombreuses.

Mathématiques II

Le texte de cette année proposait d'étudier certaines suites de tangentes à une ellipse portées par des bipoints (M_i, M_{i+1}) successifs de points d'un cercle contenant l'ellipse (alternative de Poncelet sur les « 4-cycles » où $M_5 = M_1$).

Les candidats ont montré généralement une certaine maladresse dans les raisonnements, imputable probablement au caractère quelque peu déstabilisant des questions de géométrie plane, peu familières, même lorsqu'elles demeurent élémentaires. À l'inverse, certains candidats ont montré que leur maîtrise des méthodes mathématiques leur permet d'aborder avec de très bons résultats un sujet s'éloignant du coeur du programme que constituent l'analyse fonctionnelle et l'algèbre linéaire. Rappelons d'emblée que cette géométrie élémentaire est historiquement et conceptuellement le prologue de ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie : géométrie algébrique (étude du lieu d'annulation de polynômes), et théorie des groupes. Soient deux directions bien illustrées par le sujet de cette année. Nous détaillerons d'ailleurs cette remarque en passant en revue les questions les plus abordées dans ce qui suit. Nous pointons aussi quelques lacunes sur lesquelles il convient sans doute de faire un travail spécifique dans le cours de 2ème année.

I.A Le traitement d'une telle équation est généralement bien connu.

I.B Peu d'étudiants savent interpréter le fait que la différence des polynômes définissant deux courbes fermées reste positive : beaucoup disent seulement ici que le cercle est « au-dessus » de l'ellipse.

I.C.1 Peu de candidats ont aperçu la philosophie de cette question, admettant sans démonstration qu'une droite ne rencontrant une ellipse qu'en un point lui est tangente.

I.C.2 Notons qu'à cette question il est même possible, en appliquant des dilatations, de se ramener au cas du cercle unité et d'une droite horizontale. La vision géométrique du cas des autres coniques est généralement bonne.

I.C.3 De nombreux tracés corrects qualitativement, même si le soin apporté reste incertain.

I.D Le paramétrage rationnel du cercle par la tangente de l'arc moitié paraît assez bien connu, et il y a lieu de s'en féliciter. Par contre l'application pratique laisse à désirer : nous avons vu beaucoup de demi-cercles.

I.E Les candidats appliquent un peu trop vite la machinerie consistant à trouver l'équation d'une droite passant par deux points, alors qu'il suffisait ici de montrer que les deux points satisfont l'équation proposée (en fait un seul, par symétrie des formules).

I.F.1 Des réponses souvent justes de la part de ceux, déjà moins nombreux, qui s'aventurent jusque là dans cette partie.

I.F.3 Le fait que la transformation de t en $\frac{1}{1-t}$ soit d'ordre 3 (théorie des groupes !) a été aperçu par quelques candidats.

I.G Quelques figures justes et complètes.

II.A Le fait que v_1 et v_2 ne soient pas en l'occurrence nuls simultanément n'a pas souvent été vérifié. Il faut probablement plus mettre l'accent dans le cours sur les cas « vides » ou « dégénérés » des notions introduites.

II.B.1 La formule est parfois retrouvée avec effort, mais cet effort est aussi source d'erreurs.

III.A Le cas de cercles concentriques dont le rapport des rayons est $\sqrt{2}$ a été cité par quelques copies.

III.B.1 Cette question a parfois manqué de rigueur. Quelques utilisations du produit vectoriel.

III.B.2, III.B.3 Questions a priori faciles mais pas toujours traitées avec rigueur.

III.B.4.a Quelques candidats montrent une solide intuition “linéaire” et réussissent cette question.

III.B.4.b La seconde partie de la question est très rarement traitée avec succès.

III.C.1 Cette question a produit beaucoup d'erreurs de calcul (erreurs de signe, notamment).