Mathématiques

Mathématiques I

Le problème de cette année portait sur les équations différentielles. Il faisait découvrir aux candidats différentes notions de stabilité (typiquement la stabilité en norme L^1 et en norme L^∞) pour des équations différentielles linéaires du second ordre avec amortissement évanescent.

Bien qu'il s'agisse d'un sujet assez délicat, l'énoncé était très progressif. Les deux premières parties (correspondant à plus de 50 % du barème) consistaient surtout en des questions assez classiques, notamment (mais pas uniquement) sur les équations différentielles – elles demandaient toutefois aux candidats une bonne compréhension des résultats du programme d'analyse.

Voici quelques points qui ont manifestement gêné une majorité de candidats, et sur lesquels il est souhaitable qu'ils s'améliorent :

- pour les équations du type $y'' + ay' + by = \exp(ct)$, il est souvent utile de se souvenir qu'il faut chercher des solutions particulières du type $t\exp(ct)$ lorsque c est racine simple de l'équation caractéristique, et du type $t^2\exp(ct)$ lorsque c en est une racine double.
- faute de quoi, les candidats devraient se souvenir de la méthode de variation de la constante pour une équation du second ordre – ou, ce qui revient au même, pour un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre.
- la continuité des intégrales (question IIA) dépendant d'un paramètre est mal comprise par de trop nombreux candidats – notamment la condition de domination. De même, l'étude de la dérivabilité sous le signe somme dans la question IC n'a presque jamais été correctement traitée. Le jury tient à rappeler qu'une rédaction impeccable de ce type de question – pour lesquelles il suffit de bien connaître les résultats du cours – rapporte des points en quantité appréciable.
- dans les questions IIC1 et IVB, trop peu de candidats ont compris que l'annulation en un point de $g = f + if'$ (où f est une solution réelle d'une équation différentielle linéaire résolue du second ordre) entraîne, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, que f est alors identiquement nulle, ce qui permettait de se ramener au cas étudié par les questions IIB1-2.

Mathématiques II

Le problème de Mathématiques II portait sur une étude des matrices carrées réelles, d'ordre 2, en liaison avec les opérateurs de $\mathbb{R}^2$, muni de sa norme euclidienne classique. Après un début faussement naïf - les matrices réelles *(2,2)* ! - il offrait une large transversale passant par :

- les espaces euclidiens (définition d'une forme bilinéaire symétrique *définie positive*) ;
- les opérateurs auto-adjoints - presque toutes les formulations du théorème spectral sont soit incomplètes, soit hautement fantaisistes ;
- la notion de norme subordonnée, de barycentre, de matrice orthogonale – et, dans leur presque totalité, les candidats ont affirmé que ces matrices sont toujours des matrices de rotation ;
- la notion de vecteur propre. Les matrices ne forment pas, contrairement à une croyance largement répandue chez les candidats, un anneau intègre ($AM = AN \nRightarrow M = N$) ;
- des quadriques de $\mathbb{R}^3$, pompeusement qualifiées – par les rares candidats parvenus à cette question – d'hyperboloïdes, alors qu'il s'agissait de cônes de révolution ;
- Signalons aussi que le fait que l'équation d'une réunion de deux courbes d'équations respectives : $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ s'écrit $f(x, y).g(x, y) = 0$;

Cela ne semble pas vraiment évident pour tous.

La partie I était constituée de généralités :

- définition d'un produit scalaire $< M, N >= Tr({}^tM.N)$;
- inégalités portant sur $\det(M)$ et $Tr({}^tM.N)$;
- décomposition de M sous la forme $U.D.V$, avec U et V orthogonales et D diagonale.

La partie II portait sur les matrices dont la norme subordonnée est inférieure ou égale à un. On y montre que toute matrice de la boule unité fermée, non orthogonale, appartient à un seul segment dont les extrémités sont des matrices orthogonales.

La partie III concerne le sous-ensemble de la boule unité (fermée) formé des matrices M telles que ${}^tM.M$ tM.M admette 1 comme valeur propre.