

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet propose l'étude de polynômes orthogonaux, outil fréquemment utilisé dans les sciences de l'ingénieur. Le problème est surtout prétexte à un balayage assez vaste du programme de mathématiques : nombres complexes, suites récurrentes, courbes en polaires, séries entières, développements limités, endomorphismes auto-adjoints... Cette épreuve axée principalement sur le programme d'analyse exige la maîtrise de certaines notions d'algèbre et de géométrie.

Analyse globale des résultats

Cette année encore le sujet était d'une longueur raisonnable et certains élèves ont pu le traiter presque en entier. L'absence de difficultés marquantes n'a pas empêché un bon étalement des notes. Les meilleurs élèves ont montré une bonne maîtrise du programme et de bonnes qualités rédactionnelles. De l'autre côté de l'échelle, il y a eu peu de copies quasiment vides car chacune des parties proposait quelques questions vraiment simples.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Les correcteurs ont été surpris de voir que des notions simples peuvent parfois pousser à l'erreur une très grande majorité des élèves :

- plus des trois quarts des candidats n'ont pas réussi à trouver le complémentaire de $\mathbb{R}^- \times \{0\}$. L'erreur la plus classique a été de croire que le complémentaire d'un produit cartésien de deux ensembles était le produit des deux complémentaires. Bien sûr un simple dessin permettait d'éviter cette erreur basique ;
- dans la définition du produit scalaire de la partie III, seuls 5% des candidats ont cherché à prouver l'existence de l'intégrale et 1% a réussi à le faire correctement. Ceci est étonnant car il s'agit d'une question classique sans aucun piège.

En dehors des deux points précédents, les remarques sont plus classiques. Nous proposons ci-dessous une liste des difficultés les plus fréquemment rencontrées dans les copies. Beaucoup de ces erreurs sont récurrentes et devraient être évitées par les élèves les mieux préparés :

- encore cette année, les élèves ne voient pas les problèmes spécifiques liés à la variable complexe, par exemple les notions de racine carrée et de monotonie ;
- l'utilisation des calculatrices n'est pas toujours judicieuse : on retrouve des angles en degré, des résultats de calculs sans aucune justification, etc. ;
- l'idée de conjecturer un résultat à partir d'un nombre fini de valeurs est une bonne démarche mais rien ne permet d'affirmer qu'un résultat juste pour trois valeurs d'une variable complexe l'est encore pour toutes ses valeurs ;
- certains candidats confondent produit de deux nombres et composition de deux fonctions ce qui les conduit à des erreurs grossières sur la notion de fonction réciproque ;

- trop d'élève ne connaissent pas la définition exacte d'une forme bilinéaire définie positive alors que cette notion est vraiment fondamentale en algèbre pour les produits scalaires ;
- il ne faut pas croire que toute fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} est développable en série entière en 0 ;
- l'étude des courbes en polaire est souvent mal maîtrisée ce qui nous a permis de voir de très jolies courbes malheureusement tout à fait fausses.

Analyse question par question

Première partie

I.A

I.A.1, I.A.3 De nombreux candidats croient que $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$ signifie $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $y \in \mathbb{R}^*$. La question de la définition de θ et de R devient alors triviale.

I.A.2 L'usage de la calculatrice permet d'avoir très peu d'erreurs sur cette question. Signalons tout de même que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ n'est pas défini modulo 2π .

I.A.4 Le dessin s'est avéré très discriminant. Pour la double égalité, les réponses ont été très variées et n'ont pas toujours utilisé le dessin proposé.

I.A.5 Malgré les exemples traités à la question **I.A.2**, les candidats n'ont pas tous eu l'intuition des résultats. La relation $[R(z)]^2 = z$ a tout de même été trouvée dans de nombreuses copies. Quelques rares confusions à signaler entre $[R(z)]^2$ et $(R \circ R)(z)$.

I.A.6 Cette question a été très peu réussie alors qu'il s'agissait d'utiliser $R(z)$ (une solution de l'équation) et de conclure que les deux solutions sont donc $R(z)$ et $-R(z)$.

I.A.7 Beaucoup de rédactions confuses en ce qui concerne la bijection : commencer par une définition claire eût été un bon début. L'application R n'est pas linéaire donc tout raisonnement sur le « noyau » et la dimension est incongru. La bijection réciproque est trouvée dans la plupart des copies ayant abordé cette question.

I.B

I.B.1, I.B.2 Ces deux questions très proches ont arrêté certains candidats qui n'ont pas su exploiter leur cours sur les suites récurrentes linéaires.

I.B.3 Ceux qui ont utilisé les expressions trouvées aux deux questions précédentes se sont souvent perdus dans les calculs alors que l'utilisation des conditions initiales et de la relation de récurrence permettait de conclure facilement.

Le terme « racines », a provoqué des confusions, certains candidats ayant compris « racine carrée », comme dans la partie I.A.

I.B.4 Cette question technique n'a pas été soignée par les candidats : gestion d'une récurrence double, de la partie entière, des coefficients binomiaux (peu de candidats citent la formule de Pascal), etc.

Deuxième partie

II.A

II.A.1 Les candidats ne pensent pas à commencer par le changement de repère et se perdent dans les calculs.

II.A.2 La simple substitution de a par 1 ne répond pas à la question. Le cas $\rho = 0$ est souvent oublié. Au mieux les candidats excluent le cas $\rho = 0$ avant de simplifier. L'équation $\rho^2 = 2 \cos(2\theta)$ devient $\rho = \sqrt{2 \cos(2\theta)}$, $\rho = -\sqrt{2 \cos(2\theta)}$, $\rho = \pm \sqrt{2 \cos(2\theta)}$, $\rho = \pm \sqrt{2 |\cos(2\theta)|}$ ou encore $\rho = \sqrt{2 \cos(2\theta)}$.

La bonne réponse est parfois donnée mais sans argumentation ni conditions de validité. De manière générale, l'étude de la courbe n'est pas soignée et est faite de manière cavalière. Malgré l'autorisation des calculatrices (graphiques), les dessins sont parfois fantaisistes ou incomplets.

II.B

Cette partie est soigneusement évitée par les candidats qui passent alors directement à la troisième partie. Les rares candidats s'y risquant montrent que cette partie du programme n'est pas maîtrisée.

II.B.1 Seule la définition de partie compacte du plan semble connue.

II.B.2 La formulation de la question a dérouté les candidats. Il s'agissait de vérifier que 0 était un point de Ω_z . Ce domaine étant ouvert, le point 0 est donc intérieur à Ω_z .

II.C

Cette partie a été très peu abordée par les candidats qui sont directement passés à la troisième partie, cependant cette partie contenait des questions « classiques ».

II.C.1 Une bonne compréhension des notations et des résultats de la partie I permettait de répondre sans difficultés.

II.C.2 Une simple comparaison avec le terme général d'une série géométrique permettait d'obtenir le résultat. L'utilisation de la règle de d'Alembert est à proscrire ici.

II.C.3 Les candidats ayant abordé cette question l'ont généralement bien traitée.

II.C.4 Étonnamment peu de réponses correctes (usage inapproprié de $\sqrt{z^2 - 1}$ ou de $(z^2 - 1)^{1/2}$).

II.C.5 Peu de candidats abordent cette question.

La première égalité permettait de valider le résultat de la question **III.C.3**. La deuxième égalité résultait là encore d'une bonne connaissance de la série géométrique et de la condition de convergence. L'existence de l'ouvert Δ ayant les propriétés voulues a souvent été éludée (il résulte pourtant directement de la question **II.B.2**).

II.C.6 Quelques rares réponses.

II.C.7 Très très rarement (pour ne pas dire jamais) abordée.

Troisième partie

III.A

III.A.1 Quelques rares candidats identifient le problème de convergence de l'intégrale (moins de 1 sur 10). Encore plus rares sont ceux qui donnent une preuve complète de la convergence. Très peu de candidats font une étude soignée du caractère défini, en particulier pour la nullité de la fonction en -1 et en 1 .

III.A.2 La question de l'injectivité pouvait être réglée en observant que les fonctions constantes sont dans le noyau. Certains candidats se lancent dans la résolution de l'équation différentielle...

III.A.3 Conséquence de la remarque **III.A.1**, l'intégration par parties est faite sans se soucier du fait qu'il s'agit d'une intégrale impropre.

III.B

III.B.1 Rappelons que la dimension finie est indispensable pour utiliser le théorème de réduction des endomorphismes symétriques réels. L'écriture de la matrice de l'endomorphisme induit dans la base canonique permettait aussi de répondre à cette question.

III.B.2 De trop nombreux candidats (si ce n'est tous les candidats ayant abordé cette question) pensent qu'une famille de polynômes n'est libre que si les degrés des polynômes sont deux à deux distincts.

III.B.3 Peu de réussite malgré l'indication.

III.B.4 Question bien réussie lorsqu'elle est abordée.

III.B.5 Question peu abordée et peu réussie.

III.C

III.C.1 Question peu abordée.

III.C.2 Là encore, une bonne connaissance de la série géométrique était indispensable.

III.C.3 Jamais abordée, que ce soit en utilisant **III.C.2** ou en utilisant une récurrence.

III.C.4 Aucun candidat ne justifie que V_n est dérivable. Le lien avec φ_1 est rarement abordé.

III.C.5 Rarement abordée.

III.C.6 Rarement abordée.

Conclusions

Le sujet de cette année propose de travailler autour de nombreuses notions du programme de classes préparatoires, aussi bien en analyse qu'en algèbre et géométrie. Les élèves ayant pu prendre du recul par rapport au sujet et comprendre les objectifs de chacune des parties ont pu éviter de rester bloquer sur des erreurs de calcul ou des questions non résolues.

Sans présenter de difficulté majeure, cette épreuve a pu permettre une bonne sélection des élèves basée sur la maîtrise des notions classiques du programme et la capacité à comprendre la problématique portée par le sujet.