

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet propose l'étude de matrices à coefficients prenant les valeurs 0 ou 1. Il est constitué de quatre parties abordant des aspects différents : propriétés algébriques et topologiques, matrices de permutation et génération aléatoire de telles matrices.

Ce sujet permet de parcourir de nombreux points du programme de mathématique de PSI notamment les nouveaux thèmes introduits en 2014 : probabilités et informatique.

La notion de compacité posée à la question **I.A.3)** est hors programme. Le barème n'en a pas tenu compte et les élèves ayant su répondre à la question ont eu leurs points comptabilisés dans la partie II où l'hypothèse de fermé borné était utile.

## Analyse globale des résultats

Les correcteurs ont pu constater que les candidats maîtrisent les bases de la programmation en Python ainsi que les calculs élémentaires de probabilité. Il était donc assez facile d'obtenir des points dans la partie IV.

En revanche certaines notions mathématiques sont moins bien maîtrisées : cardinalité, convexité, projection, diagonalisation... De manière moins surprenante, les questions de topologie posent problème à de nombreux candidats.

Le sujet est d'une longueur et d'une difficulté raisonnable. À l'exception de la question **IV.B.6b)**, toutes les questions ont été correctement traitées par au moins un candidat. Néanmoins, certaines ont été très peu abordées (typiquement la fin des parties III et IV) ou très mal (partie II surtout).

Enfin, de nombreux candidats ne portent aucune attention à la présentation de leurs copies. Celles-ci sont parfois difficilement lisibles ce qui fait courir un risque de mauvaise compréhension par les correcteurs.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problème aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies.
- Les candidats cherchent parfois des rédactions inutilement compliquées alors qu'une démonstration sobre permet d'obtenir un résultat juste et convainquant.
- La diagonalisation est très mal maîtrisée : matrice déjà diagonale, matrice déjà triangulaire avec unique valeur sur la diagonale, matrice symétrique réelle, confusion sur les conditions nécessaires et suffisantes, difficulté à calculer un polynôme caractéristique d'une matrice  $2 \times 2$ ...
- La notion d'ensemble fini a semblé être d'une difficulté et d'une abstraction inaccessibles à la plupart avec souvent une confusion entre cardinal et dimension. Rares sont les candidats qui s'appuient sur la non existence d'une injection d'un ensemble infini dans un ensemble fini.

- La démonstration de l'existence d'un max ou d'un min pose souvent problème, d'autant plus qu'il y a souvent confusion avec sup et inf.
- Beaucoup de candidats croient qu'une projection orthogonale a une matrice orthogonale ou se trompent sur le lien entre matrices orthogonales et symétriques.
- Il faut bien lire les questions et ne pas confondre « valeurs propres communes » et « vecteurs propres communs ».
- L'inégalité triangulaire et les majorations de valeur absolues sont très mal maîtrisées.

Le jury a apprécié les points suivants.

- L'informatique et la syntaxe Python sont bien, voire très bien, maîtrisées.
- Les probabilités sont généralement bien maîtrisées, par exemple pour l'écriture des événements avec intersections et réunions, et justifications avec incompatibilité ou indépendance. Les lois usuelles aussi. Quelques copies sont néanmoins d'une faiblesse étonnante.
- Les correcteurs ont pris plaisir à lire quelques excellentes copies.

## Conclusion

Le sujet était d'une longueur et d'une difficulté raisonnable. Il a permis de mettre en évidence les sujets maîtrisés par une majorité de candidats (programmation Python, probabilités de base) ainsi que les notions posant problème (topologie, cardinalité, projection, recherche d'extrema, diagonalisation).

De nombreuses erreurs choquantes pourraient être évitées si les candidats avaient en tête quelques exemples et contre-exemples simples sur les notions essentielles du programme. Il leur serait alors plus facile de généraliser (passer en dimension infinie par exemple) ou de comprendre la difficulté (ou la simplicité) des cas proposés.