Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le problème porte sur l'étude et sur diverses utilisations des polynômes de Tchébychev.

La partie I étudie les polynômes de Tchébychev de première et de seconde espèce : expression, relation de récurrence, degré et coefficient dominant, racines.

La partie II est consacrée à l'étude du pgcd de deux polynômes de Tchébychev, de première ou de seconde espèce.

Dans la partie III, on étudie les suites de polynômes (P_n) commutatives pour la composition et telles que, pour tout n, P_n est de degré n. La suite (X^n) des monômes et la suite (T_n) donnent deux exemples. Le théorème de Block et Thielmann, objet de cette partie, établit que toutes les solutions s'obtiennent simplement à partir de ces deux suites (conjugaison par un polynôme de degré 1).

La partie IV donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ soit la puissance n-ième d'une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$.

Analyse globale des résultats

Le problème porte sur un thème classique et repose principalement sur le programme de première année. Il demande de la rigueur, notamment dans le typage des objets et la rédaction des nombreuses récurrences.

Il nécessite une bonne connaissance des propriétés algébriques des polynômes et du calcul algébrique, ainsi que du calcul matriciel.

Le sujet a permis un bon étalement des notes. La notation a, comme toujours, accordé une grande place à la qualité des raisonnements.

Commentaires sur les réponses apportées

Partie I

Les résultats de la partie I, classiques, sont connus de nombreux candidats. Les correcteurs ont sanctionné les rédactions approximatives ou incorrectes.

Dans la question **I.A.1**, on attendait comme réponse des polynômes et non des expressions faisant intervenir des cosinus.

La première moitié de **I.A.2** a été assez bien traitée. Cependant, des candidats en nombre non négligeable ont des difficultés avec l'indexation des sommes, d'où des erreurs surprenantes à ce niveau (par exemple poser $j = 2k$ pour obtenir le résultat souhaité). La question de programmation n'a que rarement été correctement traitée.

Dans **I.A.3**, un argument d'unicité a souvent été omis : référence explicite à l'énoncé ou argument selon lequel la restriction de la fonction polynomiale associée au polynôme P à un ensemble infini détermine P. La détermination du degré et du coefficient dominant a fréquemment fait l'objet d'une rédaction désinvolte : à ce stade du problème, une récurrence soigneuse s'imposait. Enfin, le calcul classique de la somme des coefficients binomiaux $2k$ parmi n n'a été traité que par une minorité de candidats.

En **I.A.4**, les candidats ont souvent trouvé les racines. La justification du caractère simplement scindé, pourtant presque immédiate alors, a été moins bien traitée.

La sous-partie **I.B** portait sur les polynômes de Tchébychev de seconde espèce. Dans les questions **I.B.1** et **I.B.2**, il était indispensable de préciser que deux polynômes coïncidant sur un ensemble infini sont égaux.

Partie II

De nouveau, la question **II.A.1** demandait un argument d'unicité, souvent éludé. Dans **II.A.2**, la condition sur le degré du reste dans une division euclidienne a été le plus souvent oubliée.

Dans **II.B**, l'obtention du pgcd des polynômes nécessitait un examen rigoureux des racines ainsi que le caractère simplement scindé des polynômes. Seuls les bons candidats sont venus à bout de cette question assez délicate.

Partie III

La question **III.A.1** a été majoritairement bien traitée.

Dans **III.A.2**, peu de candidats ont vérifié toutes les propriétés : loi interne, neutre, inverse à gauche et à droite, l'associativité étant donnée par l'énoncé.

La question **III.B.1** a été correctement abordée par une majorité de candidats. La première partie de **III.B.2** n'a été bien résolue que par une poignée de très bons candidats. Dans la suite, les polynômes constants sont souvent oubliés.

La question **III.B.4**, très sélective, demandait une bonne compréhension de la loi de composition.

La détermination des valeurs 0 et -2 dans **III.C.1** nécessitait une bonne gestion des calculs ; elle a rarement été menée à bien.

La question finale reposait sur une compréhension globale de la partie. Elle a permis de récompenser les candidats sachant prendre de la hauteur.

Partie IV

Les correcteurs ont été surpris par la faible proportion de bonnes réponses à **IV.A**. Les candidats confondent condition nécessaire et suffisante et pensent souvent que le déterminant d'une matrice est égal à celui de son inverse.

Les questions **IV.B**, **IV.C.1**, **IV.C.2** demandaient essentiellement du soin et ont souvent été abordées.

La fin de la partie a rarement été traitée excepté l'obtention de la matrice B dans **IV.C.4** sans aucune justification.

Conclusions

Le problème permettait aux candidats de montrer leurs qualités de rédaction et de rigueur, ainsi que la maîtrise d'un certain nombre d'objets mathématiques.

Rappelons que les calculs et les démonstrations doivent figurer sur les copies. Déclarer que l'on pourrait montrer par récurrence ou qu'un calcul évident montre le résultat ne constitue pas une preuve, particulièrement en début de problème.

Terminons en signalant, une fois de plus, que de trop nombreuses copies sont peu lisibles et mal présentées. Les correcteurs ont systématiquement sanctionné le manque de soin.