

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le problème porte sur les fonctions eulériennes gamma, bêta, digamma et zêta.

Dans la partie I, on établit un résultat général de permutation série-intégrale. On en déduit une expression intégrale de la somme  $S_r$  de la série de terme général  $H_n/(n+1)^r$  pour  $r$  entier supérieur ou égal à 2, où  $H_n$  est le  $n$ ème nombre harmonique.

Dans la partie II, on étudie la fonction bêta et on exprime  $\beta(x, y)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(y)$  et  $\Gamma(x+y)$ .

La partie III est consacrée à la fonction digamma, dérivée logarithmique de la fonction gamma ; on y montre en particulier que digamma est développable en série entière au voisinage de 1. On explicite le développement.

Enfin, la partie IV utilise les résultats des parties précédentes pour exprimer  $S_r$  en fonction d'un nombre fini de valeurs de zêta.

## Analyse globale des résultats

Le problème porte sur le cœur du programme d'analyse. Il demande une bonne maîtrise du programme notamment en ce qui concerne l'intégrabilité des fonctions, les théorèmes de permutations série-intégrale, les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre et des séries de fonctions. Il nécessite de la rigueur dans la rédaction, particulièrement pour les questions fermées.

Le sujet a permis un bon étalement des notes. Les correcteurs ont, comme toujours, accordé une grande importance à la rédaction et à la clarté des raisonnements.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### Partie I

La question **I.A.1** n'est traitée correctement que par la moitié des candidats. Il est possible d'appliquer un théorème du programme en vérifiant ses hypothèses ou bien d'effectuer un développement asymptotique. La question **I.A.2** s'en déduit aisément.

Dans **I.B**, le résultat est le plus souvent donné mais pas toujours prouvé. Les questions **I.C.1** et **I.C.2** sont généralement traitées.

Dans **I.D.1**, de nombreux candidats pensent que la fonction que l'on intègre est continue sur le segment  $[0, 1]$  quelles que soient les valeurs de  $p$  et de  $q$ . Les questions **I.D.2**, **I.D.3**, **I.D.4** ne posent que peu de problèmes.

Dans **I.E**, il faut utiliser un théorème de permutation série-intégrale. Cette question n'est correctement traitée que par une minorité de candidats.

Pour **I.F.1** et **I.F.2**, il suffit de vérifier les hypothèses et d'appliquer les résultats de **I.C** et **I.E**. Les justifications sont le plus souvent inexistantes. Rappelons que lorsque le résultat est donné, l'argumentation doit être d'autant plus rigoureuse. Le changement de variable dans **I.F.3** est généralement fait. En revanche, l'expression de  $S_2$  en fonction de  $\zeta(3)$  est rarement montrée.

## Partie II

Pour la définition de la fonction  $\Gamma$  dans **II.A.1**, beaucoup de candidats omettent l'intégrabilité en 0. La donnée d'un équivalent et la comparaison aux intégrales de Riemann permettent de conclure rapidement. Une minorité de candidats pense que la limite nulle en l'infini montre l'intégrabilité.

L'expression de l'intégrale dans **II.A.2** est souvent donnée. En revanche, la définition de  $\beta$  dans **II.B.1** est laborieuse et parfois fausse. Les questions **II.B.2** et **II.B.4** sont bien traitées. Le calcul de **II.B.3**, classique mais délicat, n'aboutit que dans peu de copies.

Pour **II.C.1**, un discours peu structuré ne peut tenir lieu de preuve. Dans **II.C.2**, le changement de variable est donné ; il faut donc justifier les calculs. L'inégalité de **II.C.3** est aisée. En revanche, les questions **II.C.4**, **II.C.5** et **II.C.6**, qui demandent une maîtrise des théorèmes de régularité des intégrales à paramètres et de convergence dominée pour un paramètre continu, ne sont correctement traitées que dans un moins d'un quart des copies. Les questions **II.C.7** et **II.C.8** sont en revanche souvent vues.

## Partie III

Les questions **III.A**, **III.B** et **III.C** sont simples. Elles ne demandent que du soin dans la rédaction.

La question **III.D.1** nécessite l'utilisation du théorème de régularité des séries de fonctions et n'est que rarement bien traitée. La majoration de **III.D.2** fait appel à l'inégalité de Taylor-Lagrange et à la majoration de la dérivée  $(n+1)$ -ième ; la preuve est souvent partielle.

## Partie IV

La question **IV.A** est facile. La suite de la partie IV, beaucoup plus difficile, n'est abordée que par une minorité de candidats.

## Conclusion

Le sujet demandait une bonne aisance dans les calculs et la maîtrise du programme d'analyse de deuxième année.

Les théorèmes doivent être connus et utilisés en vérifiant précisément les hypothèses. Les démonstrations et les calculs doivent figurer sur les copies et être d'autant plus détaillés que le résultat est donné.

Rappelons que la présentation et la rédaction sont évaluées. Le manque de soin est systématiquement sanctionné. Il est par ailleurs indispensable de mettre en valeur les résultats, par exemple en les encadrant.