Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le problème porte sur les marches aléatoires symétriques unidimensionnelles, sur $\mathbb{Z}$ d'abord, puis avec des longueurs de déplacements variables dans le temps.

La première partie établit des résultats d'analyse utiles pour la suite ; à l'aide d'une intégrale à paramètre, on obtient une expression intégrale de la fonction valeur absolue, puis, en utilisant une méthode voisine de celle de Laplace, on trouve un équivalent d'une intégrale.

Dans la deuxième partie, on définit la marche aléatoire symétrique $S_n = \sum X_k$ sur $\mathbb{Z}$ et on s'intéresse à l'espérance de $|S_n|$ et au fait que S_n/n converge presque surement vers 0.

La troisième partie généralise la précédente en affectant des coefficients aux déplacements : $T_n = \sum a_k X_k$. On y étudie encore l'espérance de $|T_n|$ et on applique les résultats obtenus à une suite d'intégrales.

Analyse globale des résultats

La majorité des candidats n'a souvent fait qu'effleurer les parties de probabilités, concentrant leurs efforts sur l'analyse. Mais d'autres candidats, moins nombreux, ont su garder du temps pour approfondir les questions les plus délicates de probabilités, en traitant efficacement la première partie ; leurs idées, pertinentes, bien expliquées et mises en valeur, ont été valorisées.

Dans les copies faibles, les manipulations les plus usuelles (majorations, équivalents, calculs de limites) ne sont pas effectuées correctement, et pour les questions plus techniques d'étude d'intégrales à paramètre, la rédaction est souvent trop confuse et incomplète. De façon générale, on observe d'énormes défauts de rigueur, caractéristiques des « débutants » de première année, rédhibitoires dans un concours de ce niveau.

En ce qui concerne les probabilités, le niveau est globalement faible ; les hypothèses des théorèmes ne sont pas citées, les calculs sont menés sans justification, les inventions de théorème sont légion.

Dans ces conditions, les correcteurs ont accordé peut-être encore plus d'importance que d'habitude au soin apporté à la bonne justification des calculs et à la rigueur des raisonnements.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Partie I

La question **I.A.1)** a été particulièrement mal traitée. Les hypothèses des théorèmes nécessaires sont vaguement connues, mais dispersées dans une rédaction confuse et redondante, et leur mise en œuvre manque souvent de rigueur ; on affirme par exemple que $1/t^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ou que $\mathrm{e}^{-xt} = o(1/t^2)$ en oubliant $x = 0$. Il n'est pas nécessaire d'utiliser une domination uniquement locale pour la continuité de f et la domination sur $[a, b]$ (pour f ou f') ne permet pas de résoudre **I.A.2)**, où on étudie le comportement en $+\infty$. De nombreux candidats reviennent à la version séquentielle du théorème de convergence dominée, alors que sa version continue est maintenant au programme.

Le calcul de f'' en **I.A.3)** est souvent classiquement fait à l'aide de deux intégrations par parties successives, mais un calcul de primitive d'une exponentielle complexe, légitime, est plus efficace. La constante d'intégration pour en déduire f' ne peut pas être choisie arbitrairement, pas plus que dans **I.A.4)** !

Certains, connaissant la valeur de l'intégrale de Dirichlet, l'admettent pour calculer $f(0)$ alors que, justement, le calcul de $f(0)$ est l'objectif de toute la partie **I.A**. D'autres affirment sans aucun calcul que la limite en $+\infty$ de la fonction donnée par l'énoncé est égale à 0 ; à cet endroit, on lit trop souvent que, les deux logarithmes étant équivalents, leur différence tend vers 0.

Dans **I.B.1)**, l'intégrabilité en 0 pose de gros problèmes, les candidats ne sachant pas déterminer la limite de cette fonction ; la manipulation des équivalents et des développements limités est souvent fantaisiste.

Dans **I.C.1)**, il est évident qu'il faut procéder à un changement de variables ; on évalue alors la justification explicite, précise et correcte de celui-ci. Notamment, affirmer que $u \mapsto \sqrt{2u/n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ est une erreur, sanctionnée.

Pour l'inégalité globale de **I.C.2)**, beaucoup de candidats font un développement limité, ce qui est peine perdue ; et de très nombreux candidats ne savent pas dériver la fonction $u \mapsto \left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n$. Dans la même veine, dans **I.C.3)**, les candidats ont beaucoup de mal à justifier correctement $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n = \mathrm{e}^{-u}$, à cause de problèmes récurrents de manipulations d'équivalents.

Partie II

La question **II.A.1)** a permis de constater que les propriétés fondamentales de l'espérance et la variance d'une somme ne sont pas bien connues. Il n'est pas nécessaire que les variables soient indépendantes pour calculer l'espérance de leur somme ; de même, il peut être utile de connaitre la variance d'une somme de variables indépendantes, sans avoir à revenir à la formule de Koenig-Huygens systématiquement. N'oublions pas ceux qui croient nécessaire de calculer la loi de S_n, ou de se ramener à une loi binomiale ; ni ceux qui encadrent une variance négative, ou nulle.

Dans **II.A.2)**, nous avons souvent pu constater que les candidats ne connaissent pas les théorèmes du programme ; notamment, on peut affirmer que, puisque T et $-T$ ont même loi, alors $E(\sin(T)) = E(\sin(-T))$. Par contre, ils n'hésitent pas à inventer d'autres théorèmes : que $S+T$ et $S-T$ ont même loi, ou que $\cos(S+T)$ et $\cos(S-T)$ ont même loi ou même espérance. Ces « évidences » sont fausses en général et, si on cite l'indépendance de S et T, il faut quand même démontrer proprement ces affirmations pour s'en servir.

La « récurrence immédiate » de **II.A.3)** n'en est pas une, il faut citer explicitement l'indépendance des X_i et le lemme des coalitions pour assurer la transmission.

Dans **II.A.4)**, lire « $E\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(S_n t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-E(\cos(S_n t))}{t^2}\,\mathrm{d}t$, par linéarité de l'espérance » montre à quel point les candidats n'ont pas vu ce qui posait problème. Permuter l'espérance et l'intégrale est clairement le point le plus délicat qu'il faut détailler ici et cela n'a que rarement été fait ; il fallait bien sûr expliciter le théorème de transfert et utiliser d'abord la linéarité *de l'intégrale*.

Pour **II.B.1)**, la réponse étant donnée, une récurrence suffisait, en utilisant les propriétés de l'espérance ; mais certains candidats ont développé S_n^4 et s'en sont sortis à l'aide d'un dénombrement soigneux.

L'inégalité de Markov, nécessaire pour **II.B.3)**, est un théorème qui possède des hypothèses, ce qui ne semble pas être connu des candidats.

Très peu de candidats savent justifier que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ dans **II.B.3)**, même quand ils utilisent $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geqslant n} \left[U_k \geqslant 1/\sqrt{k}\right]$ pour la deuxième partie de la question ; il ne fallait pas oublier de préciser que $\left[U_k \geqslant 1/\sqrt{k}\right] \in \mathcal{A}$ car U_k est une variable aléatoire.

Le théorème de la continuité décroissante est bien connu, mais peu de candidats savent expliciter le sens de la propriété « $\omega \in \Omega \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$ », dans la question **II.B.4)**.

Partie III

La partie **III** a très peu été abordée, seul un très petit nombre de candidats réussit à traiter correctement quelques questions de la partie **III.A**. Par contre, les candidats sont beaucoup plus nombreux à avoir grappillé des points dans la partie **III.B**, où on pouvait se contenter d'appliquer les résultats précédents.

Conclusion

Trop de candidats ont été pénalisés en raison de leurs nombreuses erreurs dans les calculs élémentaires ; ce sont les notions de première année qui ont été le plus maltraitées. Sans des bases solides, il est illusoire d'espérer tirer son épingle du jeu.

Il convient également de rappeler que les probabilités doivent être étudiées avec la même application que le reste du programme ; notamment, la connaissance précise des théorèmes et de leurs hypothèses est nécessaire pour aborder sereinement ce type de sujet.

Finalement, rappelons qu'un effort de présentation et de lisibilité est toujours apprécié, et qu'à l'inverse, un manque de soin flagrant est toujours sanctionné. Pour les questions longues à rédiger, il faut mettre en valeur les résultats ou étapes intermédiaires, par exemple en les soulignant.