Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet revisite un thème classique, celui de la dérivation de sommes de séries de fonctions, sous un angle nouveau, c'est-à-dire avec la démonstration d'un nouveau théorème d'interversion série-dérivée avec les éléments du programme. Le sujet contient quatre parties décrites ci-après.

La partie I a pour but de démontrer une nouvelle inégalité fonctionnelle, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées d'une fonction f sur $[0,1]$ à l'aide de la dernière dérivée et des valeurs de f en un nombre fini de points. Les arguments employés reposent sur des inégalités d'accroissements finis, des arguments par récurrence et la maitrise des polynômes interpolateurs de Lagrange.

À l'aide de l'inégalité d'interpolation obtenue dans la partie I, la partie II démontre une généralisation du théorème d'interversion série-dérivée, et de façon précise du transfert $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions de classe $\mathcal{C}^K$. Comme application, le sujet considère une situation où l'on ne peut pas calculer explicitement les dérivées intermédiaires. Cette situation, *a priori* hors d'atteinte avec le théorème d'interversion série-dérivée du programme, devient abordable avec les résultats démontrés dans le sujet.

La partie III, totalement indépendante du début du sujet, combine des arguments probabilistes et des arguments de la théorie des séries numériques pour démontrer une convergence d'une série numérique aléatoire (avec probabilité 1).

La partie IV donne une approche probabiliste de l'interversion série-dérivée et montre, grâce au résultat de la partie III, qu'une telle interversion peut être possible (avec probabilité 1) dans des situations où le théorème de la partie II n'est pas applicable.

Analyse globale des résultats

Les parties I et II ont été abordées dans la quasi-totalité des copies. La partie I est globalement bien réussie même si des techniques normalement parfaitement maitrisées à ce niveau scientifique sont souvent mal menées (gestion des inégalités simples comme l'inégalité triangulaire, manipulation d'une récurrence, étude du caractère bijectif d'une application linéaire en dimension finie).

La partie II, plus technique, a été moyennement réussie. La plupart des réponses nécessitent de combiner au moins deux arguments distincts (par exemple **Q14** nécessite soit de distinguer existence et unicité, soit de traiter les deux d'un coup mais en faisant appel à la théorie, normalement maitrisée, des systèmes de Cramer 2×2 !). Les réponses ont souvent été incomplètes.

La partie III, de nature probabiliste, a été abordée dans environ 90 % des copies. En particulier, les candidats ont assimilé les notations, *a priori* compliquées, des évènements probabilistes définis implicitement avec des temps d'arrêt. Statistiquement, les questions élémentaires ont été bien traitées, mais les questions avec un peu de maitrise technique ont été très mal analysées (**Q18**, **Q24**, **Q29** par exemple).

La partie IV, de synthèse, n'a été abordée que dans 50 % des copies environ et la difficulté des questions est telle que très peu de copies ont contenu des réponses satisfaisantes.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Q1. D'après l'énoncé, les nombres $||f||_\infty$ et $||f'||_\infty$ ne peuvent être définis que si f et f' sont bornées. Peu de copies ont justifié ce détail. Plus important : beaucoup de copies ont eu l'idée de comparer f avec f' via une formule de Taylor-Young et ont fait disparaitre le reste négligeable de façon erronée.

Q2. Beaucoup de candidats ont judicieusement pensé à tester la fonction $f = 1$. D'autres ont proposé de tester une fonction constante sans préciser que la constante en question ne doit pas être nulle. Il ne s'agit là que d'un détail qui n'a été pénalisé que de façon très minoritaire. En revanche, le jury a sanctionné les copies dans lesquelles l'énoncé n'a pas été compris : en l'occurrence le nombre x_1 est fixé dès le début de façon générique, or certains candidats ont choisi des nombres x_1 qui arrangeaient leur démonstration.

Q3-Q4-Q5. Les inégalités triangulaires ont parfois été mal maitrisées. Cela concerne notamment l'inégalité triangulaire avec des intégrales, car l'ordre des bornes a rarement été pris en compte dans les restes intégraux. Plus important, une inégalité de la forme $|a-b| \leqslant |a| - |b|$ est généralement fausse. Beaucoup de copies ont contenu des dénominations inadéquates des résultats du cours (confusion entre égalité et inégalité des accroissements finis ou encore formule de Taylor-Lagrange et formule de Taylor-Young).

Q6. Dans l'ensemble, les candidats ont su gérer cette preuve d'isomorphisme. Mentionnons néanmoins quelques écueils :

- comme il s'agit de la première question où l'on a besoin d'invoquer la linéarité d'une application, le jury n'a pas accordé de points pour la seule mention « Ψ est trivialement linéaire ». Dans le même esprit, le jury a pénalisé les arguments d'injectivité basés sur un calcul de noyau sans la moindre mention de linéarité.

- on peut démontrer injectivité puis surjectivité ou encore déduire l'une de l'autre par un argument de dimension finie. Ce dernier argument a parfois été trop rapide avec une mention du type « la surjectivité découle de l'injectivité car le problème est en dimension finie ». Cet argument est recevable si l'espace d'arrivée et de départ coïncident (ce qui n'est pas le cas du sujet). Dans le cadre de l'énoncé, il faut préciser que l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension.

Q7. Le jury attendait l'utilisation de la question précédente ou (ce qui a été plus fréquent) l'explicitation des polynômes de Lagrange pour justifier l'existence des polynômes $L_1, \dots, L_K$ (on note que le titre de la sous-partie mentionne explicitement l'interpolation de Lagrange !).

Q8. De façon régulière, les rapports d'épreuves insistent sur l'attention à porter au respect de la forme des démonstrations par récurrence, qui doivent comporter l'identification d'une hypothèse de récurrence, l'initialisation et l'hérédité. Concernant la preuve, beaucoup de candidats ont compris l'utilisation du théorème de Rolle, parfois en oubliant d'insister sur le fait que les intervalles considérés sont disjoints.

Q9. En général, la question a été bien traitée.

Q10. Sur le principe, il s'agit de contrôler $||(f-P)^{(k)}||_\infty$ et $||P^{(k)}||_\infty$. Le premier terme n'a généralement pas posé de problème tandis que la gestion du second est plus technique. On peut par exemple utiliser la définition de P avec les polynômes interpolateurs de Lagrange afin de mettre en évidence les termes $|f(x_i)|$. Signalons de plus que beaucoup de candidats ont proposé des constantes C dépendant de f (ce qui est contraire aux informations de l'énoncé).

Q11. Question très facile. Globalement très bien traitée bien que le critère de comparaison pour les séries à termes positifs a parfois été oublié.

Q12. Question un peu délicate. Le transfert de $[a, b]$ vers $[0, 1]$ a souvent mal été géré : calcul de la k-ième dérivée $(f_n \circ \sigma)^{(k)}$ avec σ fonction affine ou absence de vérification de l'hypothèse (H2) pour la série de fonctions $\sum f_n \circ \sigma$.

Q13. En général, cette question a été bien traitée car elle repose sur le théorème d'interversion série-dérivée du cours.

Q14. Question *a priori* facile. Pourtant il y a eu beaucoup d'erreurs :

- un nombre très impressionnant de copies ont invoqué un problème de Cauchy d'ordre 2 avec deux conditions initiales. Cela ne correspond pas du tout théorème de Cauchy ;
- alors qu'il est annoncé que les fonctions f_n et f_n' ne s'expriment pas avec des fonctions usuelles, certains candidats ont donné des formules explicites fausses ;
- l'existence a souvent été implicitement admise et les justifications apportées n'ont essentiellement prouvé que l'unicité.

Q15. Question délicate très rarement réussie. Il faut être attentif au moindre détail au risque de commettre un sérieux oubli : en fixant un intervalle compact $[a, b]$ de $]0, +\infty[$, le sujet invite à trouver deux nombres x_1 et x_2 de $[a, b]$ tels que les deux séries $\sum f_n(x_1)$ et $\sum f_n(x_2)$ convergent, les choix naturels sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ en vertu des égalités $f_n(1) = f_n(2) = 0$, mais cette démarche ne peut être valide que si 1 et 2 appartiennent à $[a, b]$. Beaucoup de candidats n'ont pas fait attention à cette subtilité. En revanche, les candidats ayant remarqué ce détail ont pu immédiatement adapter la stratégie : il suffit de remplacer $[a, b]$ par un intervalle compact plus grand contenant 1 et 2, par exemple $[\min(1, a), \max(2, b)]$, si bien que la convergence normale sur $[\min(1, a), \max(2, b)]$ implique la convergence normale sur $[a, b]$.

Q16. Question très facile. Le jury attendait seulement un calcul de somme géométrique. Calcul parfois erroné car la somme porte sur $\mathbb{N}^\star$et non sur $\mathbb{N}$.

Q17. Il s'agit seulement d'appliquer l'inégalité d'interpolation à la fonction $x \in [0, 1] \mapsto F(x + 1)$. Cependant, trop de candidats ont appliqué sur $[1, 2]$, sans aucun recul critique, l'inégalité d'interpolation démontrée sur $[0, 1]$.

Q18. Le jury a globalement été déçu des prestations sur cette question. L'ingrédient principal est la convergence vers 0 de la suite des restes de la série $\sum a_n^2$. Pour autant, il faut encore, comme demandé, justifier l'existence d'une suite d'indices convenables. Cela peut se faire proprement par récurrence, en ce sens que le terme $\phi(j + 1)$ est construit après $\phi(j)$. Certains candidats ont tenté une approche directe en proposant :

$$\phi(j) = \min\Big\{N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n>N} a_n^2 \leqslant 8^{-j}\Big\}.$$

Cela ne convient pas car on a seulement la croissance au sens large. Signalons que de très rares copies ont trouvé une excellente astuce pour contourner cette croissance au sens large : il suffit de poser :

$$\phi(j) = j + \min\Big\{N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n>N} a_n^2 \leqslant 8^{-j}\Big\}.$$

Q19-Q20. Ce type de question est normalement classique : calcul de variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes et inégalité de Markov (ou de Tchebycheff). Le calcul de la variance a parfois posé beaucoup de difficultés.

Q21. Question très facile et globalement bien réussie.

Q22. Le point clé est la remarque de l'inclusion $A_j \subset B_j$. Or beaucoup de copies ont invoqué la formule des probabilités totales sans précisions supplémentaires.

Q23. Il s'agit de la question la plus difficile du sujet. Sans surprise, elle n'a été bien traitée que par une minorité de candidats (moins d'une centaine de copies avec des arguments intéressants). L'idée est essentiellement de conditionner selon les $2^{\phi(j+1)-\phi(j)}$ choix de X_n avec $\phi(j) + 1 \leqslant n \leqslant \phi(j + 1)$.

Q24. Les candidats n'ont souvent pas compris l'intérêt de l'indication. Le nombre $S_m - S_{\phi(j)}$ est la demi-somme des nombres $\alpha(S_{\phi(j+1)} - S_m) + S_m - S_{\phi(j)}$ avec $\alpha = \pm 1$. L'inégalité $|S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}$ implique donc forcément que l'un des deux nombres précédents est strictement supérieur à 2^{-j}. Sans indication, on peut également conclure en choisissant α de sorte que $\alpha(S_{\phi(j+1)} - S_m)$ et $S_m - S_{\phi(j)}$ ont le même signe.

Q25. Question de synthèse assez facile si les questions précédentes sont comprises.

Q26-Q27. Il s'agit de refaire la preuve du lemme classique de Borel-Cantelli. L'évènement de la **Q27** est obtenu par complémentaire.

Q28. En général, cette question a été bien traitée grâce à l'indication.

Q29. Il s'agit d'une question délicate qui n'a été traitée convenablement que dans moins de 70 copies. Souhaitant montrer la convergence de (S_n), on est amené à encadrer n dans un intervalle d'entiers de la forme $[\![\phi(j_n), \phi(j_n+1)]\!]$ avec $j_n \to +\infty$. On peut alors aisément conclure avec l'inégalité $|S_n - S_{\phi(j_n)}| \leqslant 2^{-j_n}$.

Q30. L'énoncé annonce en introduction *cette dernière hypothèse sera de nouveau affaiblie dans la partie probabiliste* en faisant référence à l'hypothèse (H2). Ainsi, la bonne réponse est prévisible et est l'implication (H2) $\Rightarrow$ (H2'). Une preuve est d'ailleurs très facile.

Q31. Cette question très facile a été globalement ratée. Beaucoup de candidats ont reconnu immédiatement une conséquence de la question **Q29** pour justifier que chacun des K évènements $\{$la série $\sum X_n f_n(x_\ell)$ est convergente$\}$ a une probabilité 1. L'argument supplémentaire, selon lequel une intersection finie d'évènements de probabilité 1 a également une probabilité 1, n'a été présent que dans une minorité de copies.

Q32-Q33. Ces questions délicates ont globalement eu des rédactions très insuffisantes (à la décharge des candidats, ces deux questions ne sont pas triviales et ont presque achevé un marathon de quatre heures).

Q34. Même sans avoir pu traiter les deux questions précédentes, les candidats qui ont abordé cette question l'ont réussie en testant $K = 2$.

Conclusion

Il est attendu qu'une copie normale soit lisible, claire et propre. Beaucoup de copies corrigées n'ont pas respecté ces critères et ont subi l'application d'un malus. On conseille l'utilisation d'une règle pour barrer les erreurs et encadrer les résultats, et de privilégier la mise en avant explicite des arguments dans les démonstrations (théorèmes ou numéro de questions utilisés, hypothèses à vérifier...).

Concernant le sujet, les candidats ont assez bien assimilé la partie « probabilités » (voir néanmoins ci-dessus pour des commentaires détaillés). De plus, le jury a apprécié que beaucoup de candidats aient tenté de traiter le problème jusqu'au bout, abordant en fin d'épreuve des questions de synthèse, quitte à admettre des résultats donnés par l'énoncé. Rappelons pour conclure, comme l'année précédente, que le jury a valorisé les tentatives raisonnables de preuve (même si elles n'ont pas abouti).