

copies.

II.B.3) Très peu pensent à utiliser la formule de Moivre et préfèrent tenter un raisonnement par récurrence : l'idée est bonne mais elle est rarement menée à bien.

Le reste de la partie II n'est à peu près jamais abordé.

III.A.1) C'est la question la plus abordée de la partie III ; les erreurs les plus fréquentes sont l'oubli des valeurs absolues, l'affirmation α_n est borné donc la série $\sum \alpha_n$ converge ou l'utilisation de la règle de D'Alembert.

III.A.2) La question n'a pratiquement jamais été traitée correctement.

III.B.2) Les hypothèses du théorème concerné sont en général connues, mais leur mise en application pose problème : principalement parce que la question II.C), nécessaire aux convergences normales, n'a pas été résolue.

Les questions qui suivent n'ont pas été abordées ou sans succès (à part quelques copies).

Conclusion

Les candidats doivent penser à parcourir l'intégralité du sujet avant de se lancer dans la rédaction de la solution. Cela leur permet de voir quels sont les thèmes abordés et d'abandonner éventuellement une partie pour en attaquer une autre où ils se sentiront plus à l'aise.

Ils ne doivent pas sauter systématiquement les questions concernant l'utilisation d'un logiciel de calcul formel car ces questions sont souvent très payantes.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Les algèbres de Lie sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ stables par le crochet $(M, N) \mapsto [M, N] = MN - NM$. Dans une algèbre de Lie \mathcal{L} , une sous-algèbre \mathcal{H} constituée de matrices diagonalisables et maximale pour l'inclusion est appelée une sous-algèbre de Cartan. Il est classique de rechercher alors les éléments λ de \mathcal{H}^* tels que $\mathcal{L}_\lambda := \{M \mid [H, M] = \lambda(H) \cdot M\} \neq 0$. La forme de cette équation fait appeler ces formes linéaires les "racines" de l'algèbre de Lie. Ces ensembles finis de formes linéaires ont des propriétés remarquables d'angles et de longueur qui conduit à leur classification et finalement à celle des algèbres de Lie. Il s'agit de la classification "ADE", connue et utilisée par la plupart des mathématiciens et physiciens théoriciens.

La première partie du problème introduisait à la notion de système de racines. La seconde introduisait à la classification des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. La troisième partie esquissait une étude systématique des sous-algèbres de Cartan en dimension quelconque, puis à celle de l'algèbre de type B_2 (appelé ici \mathcal{R}_4).

Analyse globale des résultats

Ce sujet était de nature conceptuelle, rompt avec d'autres sujets plus calculatoires lors des sessions précédentes. De nombreuses questions demandaient une démonstration par condition nécessaire et suffisante, ou un contre-exemple. Les passages les plus délicats étant l'équivalence de trois assertions à la question II.C, et une démonstration par récurrence sur la dimension d'un espace vectoriel en III.A.3. On peut regretter que les candidats connaissent mal l'usage des quantificateurs -même exprimés en langage courant.

Pour ce qui concerne les connaissances, la plupart des questions concernent l'algèbre linéaire et la réduction des endomorphismes. Cela explique sans doute que les correcteurs de cette épreuve n'ont pas relevé de lacune particulièrement grave et générale.

Les différences entre candidats ont davantage tenu à la capacité à formuler des raisonnements complets.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A. - Peu de copies donnent la formule d'une projection orthogonale sur une droite en prenant soin de la norme du générateur.

I.B. - Question facile mais qui donne lieu à beaucoup de redondances, comme chaque fois que le raisonnement doit se substituer au calcul.

I.C.1a - Cette question a constitué une plutôt bonne surprise dans la mesure où beaucoup de candidats ont su voir que le résultat devant être entier, il suffisait de montrer qu'il ne peut être ≥ 4 .

I.C.1b - Question assez bien réussie par les candidats qui l'ont abordée.

I.C.2 - Cette question aussi a été bien réussie par les candidats qui l'ont abordée.

I.D.1 - Ici la seule difficulté consistait à s'assurer que ce minimum est $\leq \pi/2$, essentiellement en changeant α en $-\alpha$. Mais peu de copies donnent l'argument.

I.D.2 - Cette question a posé des problèmes de plusieurs ordres aux candidats. Un bon point est que nombre d'entre eux (un tiers de ceux qui abordent la question) ont deviné que les droites correspondant aux éléments de \mathcal{R}_k sont au nombre de k et se déduisent les

une des autres par rotations d'angle π/k . Par contre la question des longueurs des éléments de \mathcal{R}_k est le plus souvent négligée. Et même si on s'en préoccupe, le résultat est parfois bien mal reproduit sur le dessin. Par exemple, pour \mathcal{R}_6 il faut s'attendre à voir des quadruplets "alignés" $\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \beta - 3\alpha$. De très rares dessins sont assez précis pour que ce phénomène soit apparent.

I.E.1. - Les hésitations dans cette question sont courantes.

I.E.2. - Beaucoup de candidats sont incapables de trouver l'angle entre $e_1 - e_2$ et $e_3 - e_2$. Quelques figures exactes toutefois (10 %).

II.A. - Ici il est surprenant que la définition de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ comme noyau d'une forme linéaire n'apparaisse pas plus. Du coup, un bon nombre de candidats confondent ce sous-espace avec celui des matrices à diagonale nulle et donnent une dimension égale à $n^2 - n$.

II.B. - La propriété fondamentale de la trace paraît bien connue.

II.C. - On s'étonne de voir encore beaucoup de candidats qui perdent du temps à montrer une implication qui ne leur sera d'aucune utilité pour l'équivalence visée (comme de montrer à la fois $i \Rightarrow ii$, $iii \Rightarrow i$ et $iii \Rightarrow ii$). Ici, la grande difficulté ($ii \Rightarrow iii$) est de montrer qu'une matrice nilpotente ou de spectre nul est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Certains candidats ont su prendre le temps de montrer l'indépendance linéaire de x et $f(x)$ lorsque $f(x) \neq 0$ (la question II.E.b est du même type, avec des arguments différents). Noter que l'équivalence demeure vraie pour $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$ tout entier.

II.D. - Cette question a été globalement mal traitée, hormis le sens trivial. Notons que certains candidats font preuve d'insincérité lorsqu'il faut à tout prix terminer un raisonnement par la conclusion suggérée. Le vrai test était la deuxième partie de la question où pratiquement aucune copie ne donne un contre-exemple valable en dimension 3.

Le reste de la partie II a surtout posé des problèmes de raisonnement plus que de connaissances.

III.A.1 - L'argument selon lequel une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples a été invoqué par quelques copies (10 %).

III.A.2. - Cette question a été bien traitée le plus souvent.

III.A.3. - Cette question demande une bonne vision du problème et de réelles qualités de rédaction pour présenter une démonstration complète. Deux écueils au moins ont dérouté la quasi-totalité des candidats qui s'étaient aventurés dans ces parages. Il fallait éviter de parler de bases et plutôt s'en tenir à des décompositions en somme directe de sous-espaces (ici les espaces propres d'un f_{i_0}). Une fois cela fait, il fallait éviter la tentation de faire une récurrence sur le nombre de f_i (celui-ci n'est d'ailleurs pas supposé fini).

Les autres questions de la partie III n'ont été abordées que dans une poignée de copies.

Conclusions

Ce sujet a permis à une partie des candidats de montrer des qualités indéniables de culture mathématique et de raisonnement. Il semble que la qualité de la rédaction continue de s'améliorer un peu chaque année. Pour le reste, les notions et intuitions de base d'algèbre linéaire paraissent familières.

Sciences physiques

Physique I

Présentation du sujet

Le problème s'intitule : vibrations musicales. Il s'intéresse aux vibrations mécaniques sources de l'émission sonore de quelques instruments de musique. Il aborde essentiellement deux parties du programme de deuxième année : physique des ondes et mécanique des fluides. Il y a aussi de la mécanique : études de déformations dans un solide élastique.

Le problème est constitué de deux parties :

Partie I - claviers à percussion (le xylophone, le marimba ou le glockenspiel = jeux de cloches en allemand) ;

Partie II - vibration d'une anche libre (fine languette solide), illustrée sur l'exemple de l'accordéon.

Les deux parties sont largement indépendantes.

Le problème présente un grand nombre de modèles : leur compréhension nécessite une attention soutenue. L'exploitation de résultats expérimentaux occupe une large place, en accord avec l'esprit de la filière PC. Une alternance de questions relatives aux modèles, de questions théoriques et de questions en lien avec les TP permet un étalement des notes tout à fait satisfaisant pour cette épreuve.

Le problème contient très peu de questions de cours, cependant il est nécessaire d'avoir de très solides connaissances, et de savoir les adapter pour mener à bien cette étude. Les divers modèles présentés, pas toujours évidents à comprendre, qui marchent... ou qui