Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet de cette année introduisait à des problèmes d'optimisation par la méthode des moindres carrés.

Des techniques d'analyse numérique matricielle étaient présentées de façon détaillée, comme l'application du théorème spectral aux matrices ${}^tM\,M$ pour décomposer $M = Q\Delta P$ (P, Q orthogonales, Δ diagonale) pour toute matrice M rectangulaire réelle. On était ainsi amené à travailler souvent avec le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et à étudier le déterminant des éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ intervenant dans les solutions des problèmes.

Enfin, la dernière partie proposait un exemple de méthode itérative.

Analyse globale des résultats

La plupart des questions concernaient l'algèbre linéaire et la réduction des endomorphismes avec une orientation vers des questions de minima relevant de la topologie dans certains sous-espaces de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Heureusement, peu de candidats ont paru totalement déroutés par ce problème. Les opérations de base de l'algèbre linéaire, et quadratique, sont familières et pratiquées avec efficacité.

Cela dit, même si les correcteurs de cette épreuve n'ont pas relevé de lacune particulièrement grave et générale, les quelques notions un peu moins classiques (utilisation de la topologie, raisonnements sur les sous-espaces, complétion des bases) montrent souvent une difficulté à innover hors du cadre familier.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A.1 Ici on attend une démonstration du fait que les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1. Ce fait peut paraitre classique en dimension 2 (conduisant à la notion de rotation) mais ici la dimension est quelconque.

I.A.2 Rappelons que dans un groupe d'unité e (ici la matrice identité) tout sous-groupe doit contenir e. C'était l'argument le plus simple pour se convaincre que $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ n'est *pas* un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

I.A.3 Cette question a été correctement traitée par la plupart des candidats.

I.B.1 La méthode générale s'appuie sur le fait, facile à redémontrer, que $|\beta - e^{i\theta}\alpha|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\theta}\bar{\beta}\alpha)$. Noter qu'une somme de plusieurs termes de ce type aboutirait simplement à chercher l'argument θ_0 de la somme $\sum_t \bar{\beta}_t\alpha_t$, la quantité étudiée étant alors minimale pour $\theta = -\theta_0 \bmod 2\pi$.

I.B.2 Ici $\sum_t \bar{\beta}_t\alpha_t = 2\cos(\pi/24)e^{-3i\pi/8}$ d'où un minimum pour $\theta = 3i\pi/8$. Trop peu de copies aboutissent à ce résultat. Les correcteurs ont admis toutes figures explicatives correctes, lesquelles se sont avérées de deux types : graphe d'une fonction d'une variable réelle (sinusoïde), représentation de couples de vecteurs repérés à partir du cercle trigonométrique.

II.A.1 Il est intéressant de remarquer que ce produit scalaire est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{n^2}$, ce que font bon nombre de candidats. L'écriture comme trace de ${}^tM\,N$ a aussi de nombreux avantages par la suite.

II.A.3 Ici la simplification intervient avant de prendre la trace.

II.A.4 Cette question a été moins bien traitée que la précédente car la propriété fondamentale de la trace (pourtant bien connue des candidats) doit ici être utilisée.

II.B.1 Ici on a vu trop de fautes d'étourderie : n ou 1, par exemple.

II.B.2 Question de topologie. L'idée de base est très classique : la partie étudiée est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM\,M$. Mais de nombreux candidats ne maitrisent pas assez le critère séquentiel de fermeture et beaucoup cherchent en fait à montrer que toute suite de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ converge. Une erreur assez commune également consiste à identifier $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec la sphère unité $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|_F = 1\}$.

II.B.3 La caractérisation des compacts dans un $\mathbb{R}^N$ comme fermés bornés est assez bien connue.

II.D.1 Ici, comme dans les questions du même genre qui suivent, les candidats trouvent avec une certaine facilité la bonne réponse mais vont beaucoup plus rarement au bout du raisonnement justifiant la réponse.

III.A.3 La résolution des questions précédentes a bien aidé les candidats pour trouver l'idée de celle-ci.

III.B.1 Noter qu'une famille orthonormée ($\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$) est nécessairement libre et se complète en une base orthonormée.

III.B.2 Cette question demandait de maitriser, au moins théoriquement, la notion de matrice de passage.

IV.A.3 Ici il convenait bien sûr de penser aux valeurs propres complexes (conjuguées deux à deux et donc contribuant par un réel > 0 au déterminant) de W, le piège étant de raisonner sur les seules valeurs propres réelles, qui sont 1 et -1 (s'il y en a !).

IV.A.4 Attention, rappelons qu'un sous-espace $F \subset E$ est dit *stable* par l'endomorphisme $f : E \to E$ si et seulement si $f(F)$ est *inclus* dans F (par exemple $\ker(f)$). Lorsque de plus f est inversible, il est facile de prouver $f(F) = F$. Ici il était indispensable d'avoir cette égalité $w(F) = F$.

IV.A.5 Ici on obtient d'abord la nullité de la première colonne sauf le premier élément. Ensuite il faut utiliser l'orthogonalité de W pour montrer que le reste de la première ligne est nul lui aussi.

IV.A.6 On peut également remarquer ici que la discussion faite en A.3 permettait aussi de conclure sur la trace maximale.

IV.B.1 Ici il convenait de majorer $\sum_i W'_{i,i}\Delta_{i,i}$ par $\sum_i W'_{i,i}(\Delta_{i,i} - \Delta_{n,n}) + \Delta_{n,n}\ \mathrm{tr}(W)$. Quelques candidats ont réussi cette question difficile.

V.A.1 Question de programmation très facile.

V.A.3 De nombreuses erreurs malgré l'usage des calculatrices.

V.B.2 Question difficile puisque la seule idée de changement de base ne suffit pas : elle s'applique à ${}^tZ_k\,Z_k$ mais pas directement à Z_k. De nombreuses erreurs et des calculs souvent inutiles.

Conclusions

Les notions abordées sont familières aux candidats, mais de réelles difficultés apparaissent lorsqu'il faut s'écarter un peu des exercices classiques. La rédaction est de qualité inégale, généralement fortement corrélée à la qualité du raisonnement.

Enfin, le jury regrette que soient parfois présentés comme décisifs des raisonnements dont le candidat voit pourtant bien qu'ils n'aboutissent pas.