

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet est constitué de deux parties indépendantes. La première partie correspond à l'étude de différents types de vitesse de convergence des suites réelles : vitesse lente, géométrique ou rapide. La deuxième partie propose notamment une amélioration de la majoration habituelle de  $P(|S_n/n - m| \geq \epsilon)$  rattachée à la loi faible des grands nombres dans le cas des variables aléatoires discrètes admettant un moment exponentiel : on obtient alors une vitesse de convergence géométrique au lieu d'une vitesse lente dans le cas général.

## Analyse globale des résultats

Hormis notamment les questions 3 et 4 du **I.A** et la toute dernière question **I.C.3d**, la plupart des questions de la partie I ont été plus ou moins bien traitées par une majorité de candidats. On note toutefois avec regret que certains candidats ne maîtrisent pas certaines compétences basiques :

- savoir déterminer avec concision et efficacité une limite, savoir mener jusqu'au bout des calculs classiques sur les développements limités ;
- savoir minorer et majorer un quotient à partir d'inégalités, savoir rédiger rigoureusement l'utilisation des résultats d'encadrement afin d'obtenir l'existence et la valeur d'une limite.

Concernant la partie II, les candidats se sont montrés assez efficaces sur les préliminaires, excepté pour la question **II.A.2** qui est délicate du fait de la disparition du programme de la notion de convexité des fonctions. Le reste de la partie II qui concerne les probabilités a été traité de façon inégale. La mauvaise maîtrise du théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes (formule et problème de la convergence) a pénalisé un trop grand nombre de candidats, notamment pour les questions du **II.B.2**, ce qui n'aurait pas dû poser autant de problèmes puisqu'il s'agit de traiter des exemples. Par ailleurs, certains candidats ont su repérer les quelques questions faciles du **II.D**, faisant alors preuve d'un esprit combatif.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

### Partie I

**I.A.1)** Question généralement bien traitée. Il suffisait de reprendre un des exemples de I.B.1.

**I.A.2)** Assez bien traitée. Mais certains candidats s'évertuent à vouloir prouver que  $E^c$  est un sous-espace vectoriel alors que la suite nulle n'appartient manifestement pas à  $E^c$ .

**I.A.3)** De rares candidats trouvent un exemple de suite qui appartient à  $E$  mais pas à  $E^c$ .

**I.A.4)** Quasiment jamais bien traitée. Certains candidats pensent tout de même à raisonner par l'absurde. D'autres font des raisonnements inexacts en pensant par exemple qu'une suite est soit croissante soit décroissante ou en faisant des erreurs lors de quotients d'inégalités.

**I.B.1)** Une des questions les mieux traitées avec parfois peu d'efficacité dans l'obtention des différentes limites.

**I.B.2a)** Assez bien traitée dans l'ensemble. Certains candidats sont bloqués avec un développement limité du type  $\exp(1 + u + o(u))$  ou font des raccourcis pour arriver au résultat donné, raccourcis qui sont largement sanctionnés.

**I.B.2b)** Parmi les candidats qui y pensent, très peu justifient correctement que la suite est différente de sa limite à partir d'un certain rang.

**I.B.3a, b)** Assez inégal. Deux questions qui permettent de vérifier la rigueur des candidats et leur maîtrise des notions de convergence d'une intégrale et de l'utilisation du théorème de convergence dominée.

**I.B.4a)** Question classique. Certains candidats voient bien qu'il faut utiliser une comparaison série-intégrale, mais passent par les sommes partielles plutôt que par le reste et se retrouvent dans une impasse.

**I.B.4b)** Peu de candidats vérifient que  $(S_n)$  est dans  $E$ . Des erreurs dans les quotients d'inégalités. Quelques rares copies oublient un des deux « gendarmes » pour obtenir une vitesse lente.

**I.C.1)** Assez bien traitée.

**I.C.2a)** Question facile mais assez mal rédigée dans l'ensemble.

**I.C.2b)** Le côté facile de l'inégalité a été traité par une majorité de candidats.

**I.C.2c, d)** Encore des erreurs dans les quotients d'inégalités. Croissance comparée du **d)** très peu justifiée de façon correcte.

**I.C.3a)** Réponse non prise en compte si la continuité de  $f$  n'est pas évoquée.

**I.C.3b)** De rares candidats voient que si un terme de la suite vaut  $l$  alors les suivants aussi. Des valeurs absolues manquent pour la vitesse de convergence.

**I.C.3c)** C'est une synthèse de la question précédente et de la question I.A.4 en prenant la contreposée. Parfois non vu.

**I.C.3d)** Très rarement fait.

## Partie II

**II.A.1a)** Question facile de cours. Quelques copies heureusement rares confondent les notions de séries entières et de développement limités.

**II.A.1b)** Assez bien traitée avec plus ou moins de détails.

**II.A.2)** Question assez difficile sans indication puisque la convexité des fonctions n'est plus au programme.

**II.A.3a)** Question classique traitée de façon inégale. Certains candidats se contentent d'un commentaire des hypothèses de l'énoncé.

**II.A.3b)** Question très facile et largement traitée.

**II.B.1)** Certains par « habitude » considèrent que le support de la variable aléatoire est inclus dans l'ensemble des entiers naturels, auquel cas il n'y a plus de question.

**II.B.2)** Trois questions d'applications basées sur le théorème de transfert et les développements en séries entières géométrique et de l'application exponentielle.

**II.C.1a)** La logique de l'énoncé voulait que l'on utilise la question II.A.3b, ce qui a été peu fait.

**II.C.1b)** Loi des grands nombres très rarement bien énoncée.

**II.C.2)** Il fallait utiliser les théorèmes de continuité et de dérivation de la somme d'une série de fonctions. Très mal rédigé dans l'ensemble. Certains candidats ne considérant qu'un support entier contrairement à l'énoncé, évoquent la notion de séries entières.

**II.C.3a)** Parmi les candidats qui l'ont traitée, beaucoup n'ont pas correctement justifié la dérivée de  $\psi$  en II.C.2b.

**II.C.3b)** Question rarement faite.

**II.C.4)** Nécessite l'utilisation du résultat rappelé au début de la partie II. Malgré ce rappel, certains candidats oublient l'hypothèse de mutuelle indépendance des variables aléatoires.

**II.C.5a)** La deuxième partie de la question utilisant l'inégalité de Markov a été très peu faite.

**II.C.5b)** C'est une synthèse de la question précédente et de la question II.C.3b.

**II.C.6)** Question délicate très peu faite.

**II.D.1)** Après les questions II.B.1, II.B.2, II.C.1a et II.C.2a il s'agit encore d'une question sur l'existence de l'espérance.

**II.D.2)** Questions faciles qu'il fallait repérer, le b utilisant l'inégalité du II.A.2.

**II.D.3a)** Question très abordable utilisant la croissance et la linéarité de l'espérance.

**II.D.4)** C'est une synthèse de la question précédente et de la question II.A.1b.

**II.D.5, 6)** Questions très rarement faites.

## Conclusion

Le sujet est d'une longueur raisonnable comprenant en nombre suffisant des questions d'un abord facile et d'autres plus difficiles, ce qui a permis de bien classer les candidats en fonction de leurs connaissances, leur rapidité et leur rigueur.

Parmi les points négatifs rencontrés et sanctionnés, on peut noter une absence de scrupule de la part de certains candidats qui se soucient trop peu de la forme et du sens de ce qu'ils écrivent. On rencontre ainsi de mauvaises copies très longues. À l'inverse le jury apprécie les copies qui contiennent tous les arguments décisifs tout en étant concises.

Ainsi, le jury encourage l'ensemble des candidats à travailler la rigueur de leurs raisonnements, ainsi que la précision de leur expression. Par exemple, les hypothèses des théorèmes de continuité et de dérivation de la somme d'une série de fonctions doivent être non seulement correctement énoncées mais aussi vérifiées.

Enfin, les candidats qui utilisent une encre très pâle ou qui écrivent très petit ne mettent pas toutes les chances de leur côté.

document