Mathématiques 2

Présentation du sujet

La première partie concernait le « centrage des matrices » par l'endomorphisme associé à

$$P = I_n - \frac{1}{n}\,{}^tZ\,Z \qquad \text{où} \qquad Z = (1 \cdots 1)$$

dont on étudiait deux configurations : endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: $X \to PX$ et endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $M \to PMP$.

Dans la seconde partie, on faisait le lien entre la matrice des distances mutuelles au carré

$$\left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

où les U_i sont vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et celle des produits scalaires

$$(U_i \cdot U_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Dans la troisième on établissait une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit une matrice de distances mutuelles au carré.

La quatrième partie, très « géométrique », concernait un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

Dans la cinquième partie, on étudiait le cas où il n'existe pas de points représentant une matrice de distances mutuelles et, sous conditions, trois transformations permettant de modifier la matrice donnée pour obtenir une nouvelle matrice de distances mutuelles au carré.

Analyse globale des résultats

Le sujet comportait des parties « faciles », découlant directement des définitions ou de théorèmes classiques du cours, notamment les débuts des deux premières parties. Les milieux et fins étaient, en revanche, plus difficiles et permettaient de bien sélectionner les bons candidats.

La difficulté principale du sujet était le fait qu'il présentait une certaine originalité, par exemple en demandant l'étude de l'opérateur : $M \to PMP$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ceci demandait un effort de réflexion pour apporter une réponse adéquate. La longueur du texte était aussi un facteur qui a pu surprendre certains candidats. Il ne faut jamais oublier qu'il s'agit d'un concours et non d'un examen et les candidats peuvent réussir brillamment même s'ils n'ont pas résolu l'intégralité du problème. L'écart-type est très important ce qui permet à l'épreuve d'être discriminante. Les bons candidats font preuve, tout à la fois de maitrise du cours et d'ingéniosité, (notamment dans la partie IV). Par contre, comme les années précédentes, nous avons aussi vu dans d'autres copies des fautes de raisonnement graves et des erreurs portant sur des notions élémentaires.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Comme les années précédentes, certains candidats (une majorité cette année !) semblent perdre tout jugement critique le jour du concours. La première partie n'était pas difficile ; mais les candidats ont affirmé (et souvent « démontré ») des assertions complètement erronées. Un endomorphisme égal à son carré n'est pas nécessairement un projecteur *orthogonal* ! (plus de 80 à 90% des candidats l'affirment pourtant) ; ce qui, pour nombre d'entre eux, ne l'empêche pas d'avoir, en plus un carré égal à l'identité ! Il faut reconnaitre que les dénominations peuvent induire en erreur, mais les candidats doivent savoir qu'un projecteur orthogonal ne correspond pas à une matrice orthogonale (dans une base ortho-normée) ! Ce qu'on peut traduire, en « identifiant » les endomorphismes et leurs matrices par :

- un projecteur est un endomorphisme ;
- mais un projecteur orthogonal n'est pas un endomorphisme orthogonal.

Ainsi, plus de 80% des candidats « démontrent » à la première question que l'endomorphisme est un projecteur et une isométrie ; signalons que cette conjonction conduirait à un triangle rectangle équilatéral, objet banal en géométrie sphérique, mais inexistant en géométrie plane.

On voit majoritairement énoncer un théorème spectral très approximatif, voire faux : « la matrice est symétrique réelle, donc *diagonalisable* et ses valeurs propres sont réelles ; il existe *donc* une matrice *orthogonale...* ».

De même, une matrice symétrique n'est pas la matrice d'une symétrie.

Dans la dernière partie, plus précisément le V.A, certains candidats ont parlé de projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, pensant que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est d'ailleurs paré de qualités nombreuses puisqu'il a aussi été jugé compact car fermé et borné dans une autre question. Ce type d'erreur est symptomatique d'un certain manque de rigueur que le jury est amené à sanctionner.

La forme a aussi son importance ! Les correcteurs n'ont aucune demande « calligraphique », mais de futurs ingénieurs devraient être capables de fournir un texte lisible.

Anecdotique mais désagréable (et récurrent) : la plupart des candidats ne numérotent pas les feuilles, les questions non plus, d'ailleurs. Le correcteur est souvent perplexe devant un « b) », tout seul, perdu en début d'une feuille sans aucun repère ! Pour peu que le raisonnement soit lui-même un peu « fumeux », sa patience est mise à rude épreuve !

Enfin, au risque de se répéter, des affirmations du type : « Il est clair que... », « Il est évident que... », « On voit immédiatement que... », pour justifier une proposition qui mérite d'être démontrée, se soldent par un zéro. Aucun point n'est prévu pour récompenser une conviction même si elle semble sincère. Le jury attend qu'on lui apporte une démonstration achevée, cohérente où les arguments soient clairement étayés

Conclusions

En dépit du fait qu'il ait pu paraitre un peu long, ce sujet a rempli son rôle. L'écart-type est important et le jury a vu de bonnes copies qui montrent des candidats qui dominent les parties traitées (la moitié du sujet environ pour les meilleurs) et font preuve de connaissances et clairvoyance dans leur application. Ils obtiennent des notes en correspondance avec les qualités manifestées. Les très bonnes copies sont absentes (c'était déjà le cas l'an dernier), mais le problème permettait un bon classement des candidats.